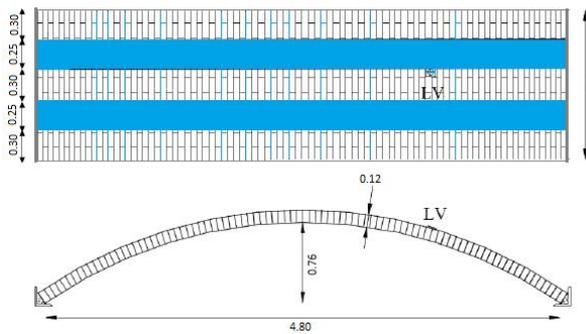


VOLTE IN MURATURA: COMPORTAMENTO DINAMICO DELLA STRUTTURA ORIGINARIA, DANNEGGIATA E RINFORZATA

Francesco Pugi *

* Ricerca e Sviluppo di AEDES Software, francesco.pugi@aedes.it, www.aedes.it

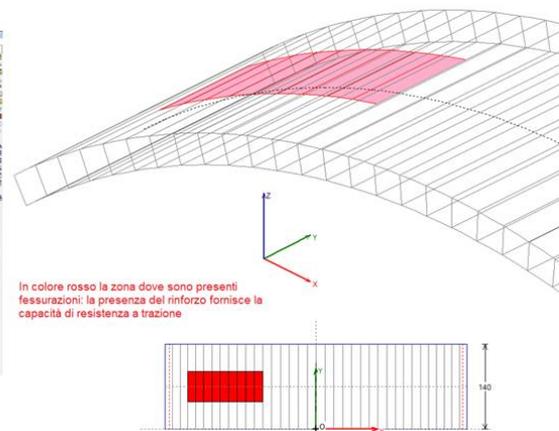
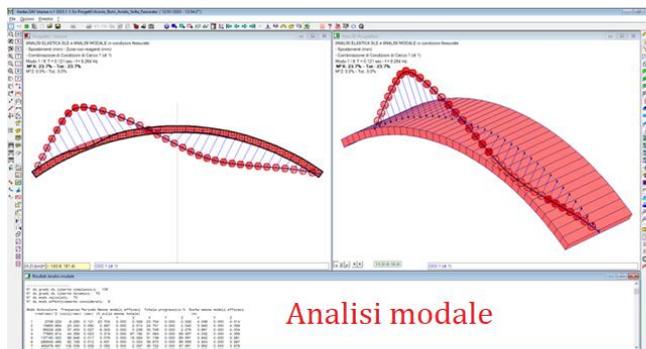
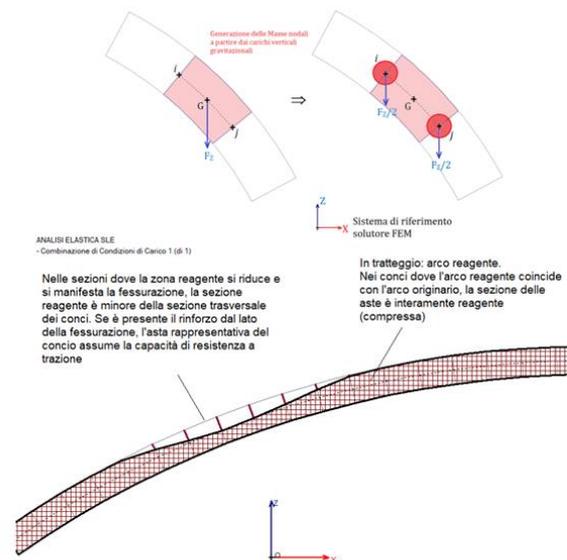
- Le **strutture voltate** sono sistemi di antica concezione e realizzazione, frequentemente **danneggiati dagli eventi subiti** nel corso della loro vita, in particolare **per effetto delle azioni sismiche**. Le **tecniche di riparazione e di rinforzo** sono finalizzate a **ripristinare e se necessario implementare le capacità originarie**.
- Le **proprietà dinamiche dei sistemi voltati**, determinate attraverso l'analisi modale, assumono un ruolo significativo in relazione a **diversi stati della struttura**: la configurazione originaria; lo stato danneggiato per effetto di un evento statico o sismico sfavorevole; lo stato rinforzato a seguito di un intervento di consolidamento.
- **Indagini sperimentali e analitiche** condotte con il software professionale Aedes.SAV mostrano che il **rinforzo con materiale composito è in grado di ristabilire il comportamento dinamico originario di volte danneggiate**. Il ripristino si consegue senza la modifica delle condizioni di vincolo e senza l'incremento dei carichi permanenti, a differenza di tecniche tradizionali quali la realizzazione di una cappa in calcestruzzo.



(a)



(b)



INDICE

[1. Introduzione](#)

[2. Il comportamento dinamico delle volte in muratura](#)

[3. Analisi modale di volte in muratura](#)

[4. Analisi modale con il software Aedes.SAV](#)

[5. Applicazione al caso studio. Validazione del software](#)

[5.1. Volta integra](#)

[5.2. Volta fessurata](#)

[5.3. Volta rinforzata](#)

[Conclusioni](#)

[Bibliografia di riferimento](#)

1. INTRODUZIONE

Il crescente interesse per la conservazione ed il consolidamento dei **systemi voltati in muratura**, presenti in gran numero negli edifici storici e monumentali, ha determinato la **necessità di individuare adeguati metodi di analisi e di valutazione delle tecniche di rinforzo**.

Le strutture voltate sono sistemi di antica concezione e realizzazione, frequentemente danneggiati dagli eventi subiti nel corso della loro vita, in particolare per effetto delle azioni sismiche. Le tecniche di riparazione e di rinforzo sono finalizzate a ripristinare e se necessario implementare le capacità originarie.

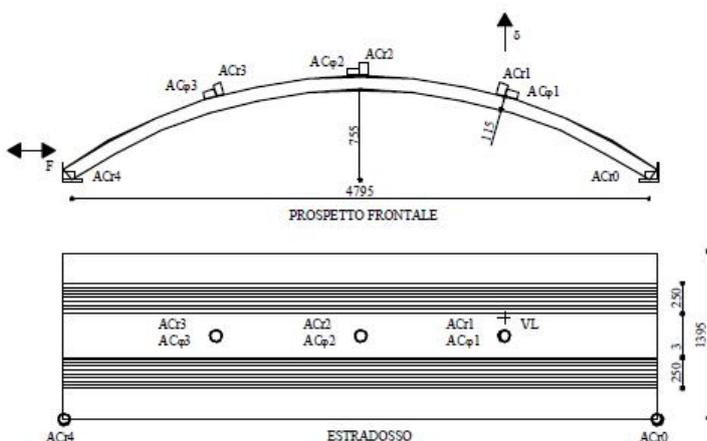
Le verifiche di sicurezza agli stati limite ultimi sono condotte con metodi appropriati, fondati sull'equilibrio in rapporto alla forma geometrica: per le verifiche di sicurezza statiche e sismiche si può adottare l'analisi limite.

Le condizioni elastiche rivestono tuttavia particolare interesse sia per il comportamento in esercizio riguardante in particolare gli spostamenti, sia per le proprietà dinamiche relativamente ai modi propri (frequenze e forme modali). **Le proprietà dinamiche vengono determinate attraverso l'analisi modale**, che può essere condotta in relazione a diversi stati della struttura: la configurazione originaria; lo stato danneggiato per effetto di un evento statico o sismico sfavorevole; lo stato rinforzato a seguito di un intervento di consolidamento.

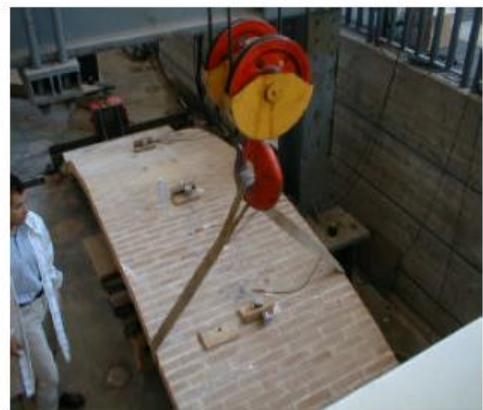
Procedure software appropriate, fondate sull'analisi dell'arco modellato in conci, consentono la stima delle proprietà dinamiche e, attraverso il confronto con i dati sperimentali, mostrano una buona capacità di individuazione dei corretti modi propri di vibrazione nei diversi stati strutturali.

2. IL COMPORTAMENTO DINAMICO DELLE VOLTE IN MURATURA

In un lavoro di riferimento per lo studio del comportamento dinamico di volte in muratura sollecitate da azioni dinamiche ([1], in seguito sviluppato ulteriormente in [2]), gli Autori, **nell'ambito di un programma sperimentale**, hanno valutato il **comportamento dinamico di un prototipo** costituito da una volta a profilo circolare in muratura in scala reale. Focalizzando l'attenzione sulle oscillazioni libere, nella prima prova si sono definiti i modi propri di vibrare della volta imponendo uno spostamento a 1/4 della luce (sezione di rene) per poi rilasciarla registrando le conseguenti oscillazioni libere. L'imposizione dello spostamento in questa sezione sollecita il primo modo di vibrare della struttura (fig. 1).



Dimensioni del prototipo e disposizione della strumentazione di acquisizione [1]



Modalità di imposizione della deformata iniziale sulla volta integra ad un quarto della luce: innalzamento della volta per consentire le vibrazioni libere [1] [2]

Fig. 1. Dimensioni del prototipo ed innalzamento per lo studio delle oscillazioni libere [1] [2]

In una fase successiva, è stata applicata una forza statica in grado di provocare fessurazione, calibrando il carico per tendere alla configurazione corrispondente alla formazione di tre cerniere, evitando la quarta che avrebbe prodotto il collasso del sistema (fig. 2).



Fig. 2. Applicazione di una forza ad 1/4 della luce dell'arco per ottenere la configurazione danneggiata [1]

Tolta la forza statica, alla volta lesionata è stata data una configurazione deformata simile a quella adottata per la volta integra, e quindi rilasciata affinché oscillasse liberamente. E' così possibile **confrontare la frequenza fondamentale corrispondente al primo modo di vibrare tra stato integro originario e stato danneggiato**; lo stato danneggiato mostra una diminuzione della frequenza.

La volta lesionata è stata infine rinforzata con nastri in GFRP (fibre di vetro) applicati in estradosso (fig. 3). La prova dinamica condotta imponendo alla volta la deformata iniziale per poi lasciarla oscillare liberamente, in modo analogo alle prove precedenti, ha mostrato un **aumento della frequenza propria**.

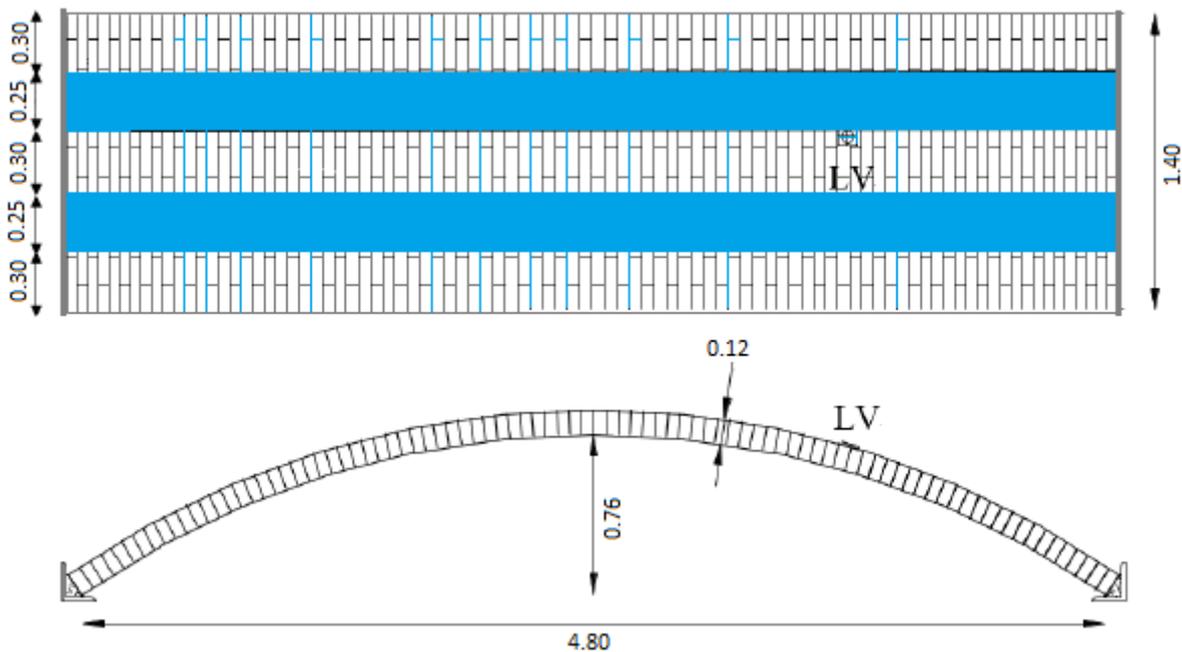


Fig. 3. Rinforzo della volta con nastri in GFRP (rielaborazione da [2])

Come specificato nella Ricerca, l'aumento della frequenza propria indica l'**effetto positivo prodotto dall'applicazione del rinforzo con materiale composito**, il cui contributo si ripercuote in un aumento della rigidezza del sistema in corrispondenza delle sezioni fessurate e conseguentemente nel suo complesso. **L'applicazione del rinforzo con materiale composito tende quindi a ripristinare il comportamento dinamico della struttura integra originaria.**

In una fase finale della sperimentazione, la volta è stata portata a collasso applicando un carico concentrato a metà luce, incrementandolo staticamente. La presenza del rinforzo ha impedito la formazione del

meccanismo di collasso cinematico tipico delle strutture voltate, determinando una crisi per resistenza del materiale murario, ossia nella muratura per compressione (schiacciamento).

Lo studio illustrato in [2] amplia le considerazioni espresse in [1], rielaborando i risultati di un'indagine sperimentale condotta sia in laboratorio sia con prove in sito, riguardante il comportamento di volte in muratura di mattoni rinforzate con FRP sottoposte ad un carico dinamico.

Per le prove di laboratorio, le volte in mattoni sono state costruite con mattoni pieni di argilla levigata e malta di deboli caratteristiche meccaniche; le prove sono state finalizzate allo studio del comportamento dinamico negli stati integro, danneggiato e rinforzato. Le prove in sito hanno riguardato una sottile volta in mattoni di una residenza aristocratica della città del XVIII secolo dell'Aquila, Italia, danneggiata dal terremoto del 2009.

L'indagine dimostra che **il rinforzo con materiale composito ristabilisce il comportamento elastico di volte danneggiate**: in altre parole, si ribadisce che l'intervento determina un sostanziale ripristino della frequenza principale originaria. Grazie alla tecnica del materiale composito, **il ripristino delle condizioni antecedenti al danno si consegue senza la modifica delle condizioni di vincolo e senza l'incremento dei carichi permanenti, vantaggi** che affiancano la caratteristica di non invasività, a differenza di tecniche tradizionali quali la realizzazione di una cappa in c.a. estradossale.

3. ANALISI MODALE DI VOLTE IN MURATURA

Nel presente lavoro viene mostrata l'**applicazione del software di uso professionale dedicato all'analisi delle strutture murarie voltate Aedes.SAV [3] per lo studio delle proprietà dinamiche delle volte**, valutando attraverso l'analisi modale le caratteristiche originarie di un sistema voltato, quelle legate ad uno stato di danneggiamento ed infine le proprietà implementate attraverso l'applicazione di un rinforzo in composito.

Nel software SAV la progettazione del rinforzo con sistemi compositi di varia tipologia, consiste nell'**accertare il miglioramento della risposta strutturale agli stati limite ultimi, sia in campo statico che sismico**. La resistenza a trazione offerta dal rinforzo tende ad impedire la formazione dei meccanismi di collasso, conseguendo indicatori di rischio statico e sismico maggiori rispetto allo stato originario. In SAV la verifica strutturale della sicurezza sistema voltato nei confronti degli stati limite ultimi (EQU in statica, SLV in sismica) viene condotta con l'analisi limite, seguendo la teoria rigido-fragile di Heyman, ossia attribuendo le capacità strutturali della volta alla resistenza per forma, strettamente legata alla geometria e alle condizioni di equilibrio.

Peraltro, è noto che un'analisi sismica dinamica modale in campo elastico lineare ai fini della verifica di sicurezza non è appropriata per le strutture voltate. La motivazione di ciò risiede in quanto affermato nelle CNR-DT 213/2015, riferito in tale contesto ai ponti in muratura ma immediatamente estendibile in generale ai sistemi voltati in muratura:

"1.4 AZIONE SISMICA (...) Il comportamento certamente non lineare della struttura, deriva principalmente dalla debole resistenza a trazione del materiale, che al limite è nulla, da fenomeni di schiacciamento, e dal possibile dislocamento del pietrame nel corso dello scuotimento sismico. La non-linearità del sistema strutturale rende vane, o comunque di dubbia efficacia, analisi basate sul principio di sovrapposizione, priva di senso le analisi modali e inficia la stessa rappresentazione della azione sismica attraverso gli spettri di risposta elastici (...)"

Lo studio del comportamento elastico del sistema voltato è tuttavia molto importante: dal punto di vista della sollecitazione e della deformazione sotto l'azione di un carico statico, le proprietà elastiche vengono considerate in SAV ai fini della verifica in campo elastico-non lineare allo Stato Limite di Esercizio (SLE), seguendo le indicazioni di Normativa (§8.4.2 CNR-DT 213/2015).

L'analisi modale non è direttamente collegata ai metodi di verifica della sicurezza, tuttavia essa assume ugualmente **notevole importanza sotto i seguenti aspetti**:

- dal confronto fra caratterizzazione dinamica attraverso prove sperimentali e modellazione analitica, è possibile trarre **utili informazioni sull'entità dello stato di danneggiamento della volta**;
- la conoscenza delle proprietà dinamiche della volta permette **lo studio dei possibili danneggiamenti indotti da carichi ciclici**;
- lo studio della variazione delle frequenze proprie su una volta integra, fessurata o rinforzata ad esempio con nastri in composito, permette di **convalidare l'efficacia dell'intervento effettuato su una volta danneggiata** attraverso la conferma del ripristino delle proprietà dinamiche originarie.

Nei paragrafi seguenti, dopo un approfondimento sulla metodologia di analisi implementata in SAV, viene presentata un'applicazione dell'analisi modale condotta ripercorrendo lo studio presentato in [1] e in [2]; in tale ambito, attraverso il confronto con i parametri di origine sperimentale, resta inoltre definita la procedura di validazione del software.

4. ANALISI MODALE CON IL SOFTWARE Aedes.SAV

L'analisi modale in SAV consiste nel **calcolo dei modi propri di vibrare** (periodi e corrispondenti deformate modali), **elaborati su modello elastico riferito alle masse corrispondenti agli stati limite considerati**: SLE per analisi elastica, SLU: EQU per analisi statica, SLU: SLV per analisi sismica, in condizione integre o fessurate.

La modellazione della struttura ad arco è condotta in modo del tutto analogo all'Analisi elastica, secondo un modello ad elementi finiti (FEM) monodimensionali aventi comportamento elastico lineare.

Il vincolamento alle imposte può essere incastro, cerniera o semincastro (grado di incastro intermedio).

Nell'analisi elastica, SAV gestisce la non linearità attraverso la non resistenza a trazione, applicando un procedimento iterativo che corregge le proprietà statiche delle sezioni trasversali degli elementi sottoposti a verifica tensionale, riducendo la sezione geometrica iniziale alla sola parte reagente a compressione, fino a determinare, se possibile, la convergenza in corrispondenza di verifiche di sicurezza soddisfatte. Risulta così determinato un arco reagente, corrispondente alla parte strutturale che contiene il flusso delle tensioni di compressione.

Nell'analisi limite, SAV risolve la struttura in campo statico (SLU: EQU) o sismico (SLU: SLV) con riferimento al modello rigido-fragile, ed in corrispondenza di una data soluzione statica è possibile definire un campo di fessurazioni determinate dall'arco reagente.

L'analisi modale in SAV può essere eseguita, secondo l'opzione scelta in input, in una delle due seguenti modalità:

- elastica, con struttura integra, completamente reagente;
- fessurata, con riferimento all'arco reagente, ossia alle sezioni geometriche ridotte considerando la sola parte reagente a compressione e quindi, a parità di masse, con rigidezze ridotte. Per ogni stato limite considerato e per ogni arco ideale e Combinazione di Condizioni di Carico esaminati, l'arco reagente è quello determinato dalla corrispondente configurazione di sollecitazione elaborata dall'analisi.

Nella modellazione FEM la struttura viene considerata come un assemblaggio di pezzi discreti, chiamati elementi, interconnessi in un numero finito di punti o nodi. Nei modelli monodimensionali, gli elementi sono le aste ed i nodi sono le connessioni fra le aste.

Il modello utilizzato per l'analisi modale in SAV, analogo al modello dell'analisi elastica, è un **modello piano costituito da elementi finiti monodimensionali: le aste corrispondono ai conci costituenti l'arcata (volta) e sono collegate tra loro da nodi definiti dai baricentri delle interfacce tra conci** (fig. 4). Questa modellazione è prevista dalla normativa (CNR-DT 213/2015, §8.4: modello bidimensionale) dove si indica che l'arcata può essere modellata con elementi trave ad asse rettilineo (i conci) (§8.4.2).

In analisi modale viene costruita una matrice di rigidezza globale assemblando le matrici di rigidezza dei singoli elementi, mentre le masse agenti vengono concentrate nei nodi e corrispondono ai carichi verticali gravitazionali. I gradi di libertà dinamici corrispondono ai movimenti dei nodi, e nel modello piano 2D (piano XZ contenente il piano medio della volta) consistono nelle traslazioni secondo gli assi di riferimento: X e Z.

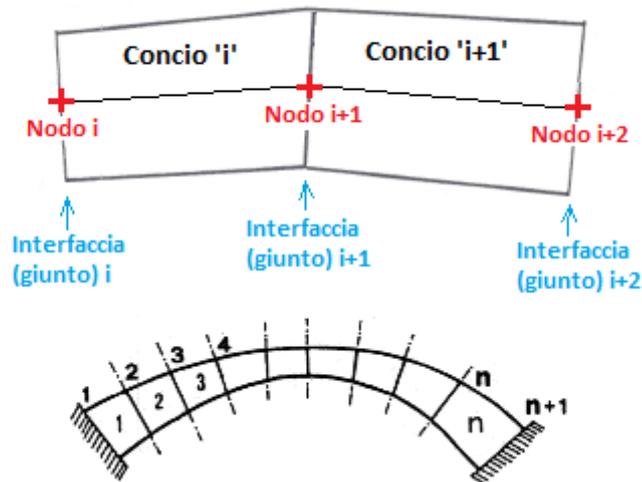


Fig. 4. Modellazione bidimensionale. Numerazioni dei nodi (interfacce = giunti) e delle aste (=conci)

In sintesi, l'analisi modale condotta con il metodo degli elementi finiti consiste nei seguenti passi:

- schematizzazione della struttura mediante nodi ed elementi;
- creazione della matrice di rigidezza di ogni singolo elemento ('asta') utilizzato;
- assemblaggio delle matrici di rigidezza delle aste nella matrice di rigidezza globale: \mathbf{K} ;
- definizione delle masse concentrate nodali corrispondenti ai carichi verticali distribuiti e concentrati di tipo gravitazionale;
- assemblaggio delle masse nodali nella matrice di massa globale \mathbf{M} ;
- risoluzione del problema generalizzato agli autovalori e autovettori: $\mathbf{K} \mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{x}$ con determinazione dei modi di vibrare, dove ω è la pulsazione (autovalore) e \mathbf{x} il corrispondente autovettore (deformata modale).

Più in dettaglio, lo studio delle vibrazioni libere di un sistema strutturale viene formulato nel modo seguente.

Considerando un sistema ad un solo grado di libertà, caratterizzato da: massa m , costante elastica k , spostamento u , la forza d'inerzia $m\ddot{u}$ deve essere in equilibrio con la forza elastica ku , pertanto: $m\ddot{u} + ku = 0$, ovvero: $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$, dove: $\omega = \sqrt{k/m}$ è la pulsazione di questo sistema di vibrazioni libere. La soluzione dell'equazione è data da: $u = \dot{u}_0/\omega \sin \omega t + u_0 \cos \omega t$, dove u_0 e \dot{u}_0 sono rispettivamente lo spostamento e la velocità iniziali. Il periodo del moto armonico è: $T = 2\pi/\omega$.

Nel caso di un sistema a N gradi di libertà, per determinare i periodi propri e le forme modali l'equazione di moto diviene:

$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = 0$, con \mathbf{M} matrice di massa, \mathbf{K} matrice di rigidezza, \mathbf{u} vettore degli spostamenti.

La soluzione è data dal moto armonico semplice: $\mathbf{u} = \mathbf{x} \sin \omega t$, dove \mathbf{x} è il vettore con le ampiezze di vibrazione.

Segue: $\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{x} \sin \omega t$, e l'equazione di moto diviene:

$\mathbf{K} \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{x} = 0$, ossia: $\mathbf{K} \mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{x}$:

questa equazione ammette valori non tutti nulli di \mathbf{x} se e solo se il determinante dei coefficienti si annulla: $|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$. La soluzione di questa equazione fornisce i valori ω_i delle frequenze proprie del sistema (autovalori) ($i=1, \dots, N$) e quindi i corrispondenti periodi propri $= 2\pi/\omega_i$. Ad ogni periodo è associato un vettore $\mathbf{x}^{(i)}$ (autovettore) che, a meno di una costante, definisce la forma modale dell' i -esimo modo proprio di vibrare del sistema strutturale.

Il metodo risolutivo del problema agli autovalori implementato in SAV è il metodo SubSpace Iteration (iterazione nel sottospazio); per i dettagli teorici sul metodo si rinvia ai testi specializzati sulla dinamica delle strutture. Dal punto di vista informatico è stato fatto riferimento alle librerie Lapack in uso da tempo e contenenti algoritmi testati dalla comunità scientifica, in grado di assicurare precisione e stabilità numerica.

L'analisi modale viene completata con la definizione dei coefficienti di partecipazione modale $g^{(i)}$ e della massa modale efficace $M^{(i)}$. Considerando il modello piano dell'arco (posto nel piano XZ), con masse M_j ($j=1, \dots, n$), per il modo i -esimo, indicando con $(x_j^{(i)}, z_j^{(i)})$ le componenti secondo X e Z di $\mathbf{x}^{(i)}$, si definiscono: $M_i^* = \Sigma(M_j x_j^{(i)2}) + \Sigma(M_j z_j^{(i)2})$, e le seguenti grandezze:

coefficienti di partecipazione: $g_x^{(i)} = \Sigma(M_j x_j^{(i)2}) / M_i^*$, $g_z^{(i)} = \Sigma(M_j z_j^{(i)2}) / M_i^*$

masse modali efficaci: $M_x^{(i)} = [\Sigma(M_j x_j^{(i)})]^2 / M_i^*$, $M_z^{(i)} = [\Sigma(M_j z_j^{(i)})]^2 / M_i^*$

La massa modale efficace del modo i -esimo in una direzione può essere interpretata come la parte di massa totale che viene movimentata da tale modo in quella direzione. Questa interpretazione è rigorosamente vera solo se il sistema ha gradi di libertà secondo una sola direzione (X o Z) e con masse tutte uguali: in tal caso, infatti, la massa totale è pari alla somma estesa a tutti i modi delle masse modali efficaci.

La massa modale efficace dipende dalla deformata modale, poiché non tutte le masse strutturali vibrano con la stessa efficacia in ciascuna modalità. Soprattutto nel caso di deformate modali superiori, alcune masse possono vibrare di meno o non vibrare affatto. Per ognuna delle due direzioni si definisce **modo fondamentale** (o 'primo modo') il modo che movimentata la maggior parte delle masse in tale direzione. Generalmente, le prime deformate modali, caratterizzate dai periodi più alti, sono quelle che movimentano la maggior parte delle masse.

Fra tutti i modi calcolati, corrispondenti ai gradi di libertà dinamici del sistema, rivestono interesse i modi che, a partire dal primo, assicurano che la somma delle masse modali efficaci sia pari ad almeno l'85% della massa totale. Ciò assume particolare importanza nelle analisi sismiche dinamiche, dove vengono valutate forze sismiche spettrali competenti ai diversi modi di vibrare, che vengono tra loro combinate come indicato in §7.3.3.1 di NTC18 per tenere conto dello sfasamento fra i modi.

In SAV l'analisi modale non viene utilizzata ai fini di un'analisi sismica dinamica lineare: l'analisi sismica in SAV viene infatti eseguita con il modello rigido-fragile, seguendo la teoria di Heyman.

L'analisi modale in SAV è finalizzata allo studio delle vibrazioni proprie del sistema voltato sotto carichi e fessurazioni corrispondenti allo stato limite di esercizio o agli stati limite ultimi.

I risultati illustrano tutti i modi di vibrare significativi, affinché siano disponibili tutte le informazioni su periodi, forme modali e masse modali efficaci, garantendo l'individuazione dei modi più significativi, fra cui i modi principali nelle due direzioni di riferimento X e Z.

In SAV è possibile specificare il numero di modi da calcolare e quelli da considerare per mostrare i risultati.

Per il **numero di modi da calcolare** è possibile scegliere tra le seguenti opzioni:

- tutti i modi corrispondenti ai gradi di libertà dinamici del sistema;
- un numero di modi specificato in input (con limite superiore dato dal n° dei gradi di libertà dinamici).

Si osservi che in dipendenza dalla struttura, può essere necessario il calcolo di un numero elevato di modi, per assicurare l'individuazione del modo principale e per movimentare una percentuale sufficiente di massa.

Le opzioni A) C) E) di seguito riportate, relative al 'Numero di modi da considerare', impongono necessariamente il calcolo di tutti i modi di vibrare; scegliendo le opzioni B) D) occorre il controllo a posteriori della massa movimentata.

Per il **numero di modi da considerare** sono disponibili le seguenti opzioni:

- A) tutti i modi calcolati;
- B) un numero di modi specificato in input (con limite superiore dato dal numero dei modi calcolati);
- C) tutti i modi con massa partecipante superiore al 5% (con questa opzione vengono sempre calcolati tutti i modi);
- D) un numero di modi la cui massa partecipante totale sia superiore all'85% (un limitato numero di modi

calcolati potrebbe non essere sufficiente a soddisfare questa condizione: in tal caso, i modi considerati saranno tutti quelli calcolati, e nei risultati si potrà osservare che la massa partecipante non supera l'85%); E) tutti i modi con massa partecipante superiore al 5% e comunque un numero di modi la cui massa partecipante totale sia superiore all'85% (vengono sempre calcolati tutti i modi) (opzione indicata in §7.3.3.1 di NTC18).

I carichi applicati sull'arcata, definiti nel modello di SAV sui conci, vengono attribuiti ai nodi nel seguente modo: considerando l'arco modellato nel piano XZ, la forza verticale F_z viene riportata al baricentro del concio e scomposta in parti uguali ai due nodi iniziale e finale del concio (fig. 5). Di conseguenza, nel nodo i -esimo (coincidente col nodo finale j del concio $i-1$ precedente e col nodo iniziale i del concio i successivo) agisce la somma di due contributi di carico relativi ai due conci.

Per quanto riguarda le convenzioni sui segni, in ambiente SAV la forza verticale Z in input nelle CCE è positiva e di tipo gravitazionale se verso il basso.

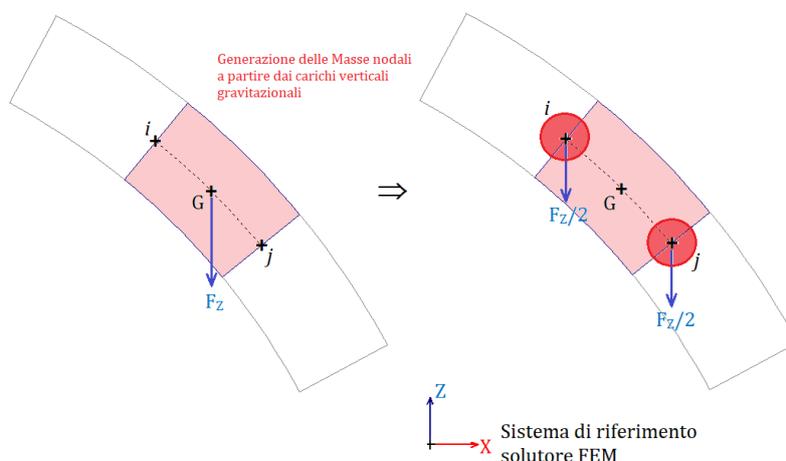


Fig. 5. Attribuzione dei carichi ai nodi e generazione delle masse nodali

In SAV una Volta può essere composta da uno o più archi affiancati, in cui la Volta viene suddivisa. Per ogni arco, SAV esegue l'analisi modale per le seguenti configurazioni:

in analisi elastica, per tutte le CCC da analizzare per SLE;

in analisi statica SLU: EQU: per tutte le CCC;

in analisi sismica SLU: SLV: per la direzione X nei due versi +X e -X.

I modi di vibrare possono quindi differire fra le diverse configurazioni esaminate, alle quali in generale corrispondono masse diverse e diversi stati di fessurazione, ed in particolare nel caso di più archi ideali possono differire tra i vari archi affiancati, se vi sono carichi presenti solo su una parte della struttura (non su tutti gli archi). La diversità dei modi di vibrare fra archi affiancati costituisce una semplificazione del problema spaziale: tuttavia, le informazioni ottenute possono essere significative per inquadrare in prima approssimazione la modifica della forma modale nella direzione trasversale Y rispetto al piano medio dell'arcata (piano XZ).

Nell'analisi modale riferita alle masse e alle fessurazioni dell'analisi elastica SLE, in una data CCC si considerano - secondo i dati in input - una o più CCE (riconosciute in base al moltiplicatore non nullo: il moltiplicatore definito in SAV viene utilizzato per le combinazioni SLU, e se non nullo viene posto pari a 1 per la combinazione SLE). I carichi della CCC sono composti dall'assemblaggio dei carichi delle CCE considerate, ognuna delle quali è affetta dal proprio coefficiente di combinazione ψ_0 definito in input, secondo la formulazione della Combinazione caratteristica impiegata per gli SLE ([2.5.2] in §2.5.3, NTC18 e §3.9 in CNR-DT 213/2015).

Nell'analisi modale riferita alle masse e alle fessurazioni dell'analisi statica condotta per SLU (EQU), si considerano le diverse CCC definite. I carichi delle CCC sono composti dall'assemblaggio dei carichi delle CCE considerate, ognuna delle quali è affetta dal proprio moltiplicatore (inteso come coefficiente parziale per le

azioni γ_G , γ_Q) e dal proprio coefficiente di combinazione ψ_0 definito in input, secondo la formulazione della Combinazione fondamentale impiegata per gli SLU ([2.5.1] in §2.5.3, NTC18).

Nell'analisi modale riferita alle masse e alle fessurazioni dell'analisi sismica condotta per SLU (SLV), si considerano le due combinazioni sismiche +X e -X, ognuna determinata dall'assemblaggio dei carichi delle CCE contrassegnati come agenti sismicamente (carichi gravitazionali) ed affetta dal proprio coefficiente di combinazione ψ_2 definito in input, secondo la formulazione della Combinazione sismica ([2.5.5] in §2.5.3, NTC18).

Alle aste vengono attribuiti i **moduli di elasticità** longitudinale e tangenziale della muratura definiti nei dati della volta. Nelle analisi elastiche in generale viene fatto riferimento ai valori medi dei moduli di elasticità, come specificato in §4.1.1.1 NTC per gli elementi in calcestruzzo: in assenza di indicazioni specifiche per la muratura, il riferimento ai valori medi si può ritenere valido anche per gli elementi strutturali in muratura (i valori medi dei moduli elastici sono peraltro normalmente assunti per i livelli di conoscenza LC1 e LC2). In ogni caso, i moduli di elasticità utilizzati vengono definiti in input.

In SAV sono inoltre previste due possibili riduzioni dei valori di riferimento dei moduli elastici, riguardanti le rigidezze fessurate e l'applicazione del fattore di confidenza.

• **Rigidezze fessurate**

Nelle analisi elastiche lineari in condizioni statiche NTC non prevede riduzioni dei moduli di elasticità a causa delle condizioni fessurate, tranne il caso degli elementi in calcestruzzo per la determinazione degli effetti delle deformazioni termiche, degli eventuali cedimenti e del ritiro, per i quali negli stati limite di esercizio si devono assumere rigidezze intermedie tra quelle delle sezioni interamente reagenti e quelle delle sezioni fessurate, essendo queste ultime assunte pari alla metà di quelle delle sezioni interamente reagenti (§4.1.1.1 NTC): ciò equivale ad una riduzione del 25% dei moduli elastici.

Per tenere conto in SLE delle condizioni fessurate che possono caratterizzare gli archi in muratura, SAV consente opzionalmente tale riduzione; tuttavia, si deve considerare che il procedimento non lineare di SAV può determinare la riduzione delle rigidezze attraverso il calcolo e in linea di principio non è necessario ridurre i moduli elastici per tener conto della fessurazione. La riduzione è comunque consigliabile qualora si decida di eseguire l'analisi modale in modalità elastica, con struttura completamente reagente.

Analogamente, per l'analisi modale riferita all'analisi statica SLU: EQU, viene applicata se richiesta la riduzione del 25%.

Nel caso invece di analisi modale associata all'analisi sismica SLU: SLV, la riduzione è pari al 50% (§7.2.6).

Tuttavia, per le analisi modali riferite alle analisi limite statica e sismica si può osservare che l'analisi in condizione fessurate corrispondenti all'arco reagente determinato dalla soluzione comporta implicitamente la riduzione della rigidezza nella definizione delle sezioni delle aste di modello e pertanto l'opzione di riduzione dei moduli elastici può non essere scelta.

• **Fattore di confidenza F_c**

Secondo quanto indicato in §C8.5.4 NTC: "I fattori di confidenza sono utilizzati per la riduzione dei valori dei parametri meccanici dei materiali. (...)". In SAV F_c può essere applicato, oltre ai parametri di resistenza, anche ai moduli elastici.

5. APPLICAZIONE AL CASO STUDIO. VALIDAZIONE DEL SOFTWARE

Il software SAV viene applicato allo studio delle proprietà dinamiche della volta soggetta a sperimentazione e descritta in precedenza [1] [2], avente le seguenti caratteristiche.

• Geometria

Luce all'imposta (intradosso) 4.795 m.
freccia dalla linea d'imposta alla chiave in intradosso: 0.755 m.
spessore: 0.12 m (corrispondente ai mattoni ad una testa)
profondità della volta: 1.395 m
raggio di curvatura: 4.18 m

• Materiali

La volta è stata realizzata utilizzando mattoni nuovi pieni di dimensioni nominali 5.5x12x25 cm e malta di calce di deboli caratteristiche meccaniche. I giunti di malta hanno uno spessore medio di 1 cm.
Da [2] sono noti i parametri meccanici, ottenuti mediante la costruzione di muretti sottoposti a prova finalizzata alla determinazione della resistenza a compressione f_m e del modulo di elasticità E .
Sono risultati i seguenti valori: $f_m=6.17$ N/mm², $E=3634$ N/mm². Il peso specifico della muratura è pari a 16.57 kN/m³.

• Vincoli

Le imposte della volta sono costituite da un profilo metallico a L bloccato al solaio del laboratorio; all'interno del profilo è stato fatto un getto di calcestruzzo di sezione triangolare per impostare la volta con un mattone intero (fig. 6). Dal punto di vista delle modalità costruttive, la volta è stata costruita a partire dalle due imposte per terminare in chiave con l'inserimento di un cuneo in laterizio.



(a)



(b)

Fig. 6. (a) Vincolamento alle imposte; (b) applicazione dei nastri di rinforzo in GFRP [1] [2]

• Rinforzi

Per la fase relativa all'applicazione dei rinforzi a seguito del danneggiamento imposto, sono stati utilizzati nastri unidirezionali in fibra di vetro AR-GFRP (Alkaline Resistant Glass Fiber Reinforced Polymer) e più esattamente due strisce di fibra larghe 250 mm ad una distanza di 550 mm l'una dall'altra, applicate in estradosso (figg. 3, 6), aventi le seguenti caratteristiche:

- modulo di elasticità: $E = 65000 \text{ N/mm}^2$
- resistenza a trazione: $f_t = 1700 \text{ N/mm}^2$
- spessore del nastro: 0.23 mm

5.1. VOLTA INTEGRA

La volta è stata modellata in Aedes.SAV con le seguenti modalità.

• Geometria

Volta circolare ad arco ribassato, avente le seguenti dimensioni (cm) (fig. 7):

profondità 140; corda 480 e freccia 76, da cui risulta il raggio di curvatura in intradosso 417; spessore costante, pari a 12 cm.

Per la discretizzazione in conci, è stato scelto un numero totale di conci pari a 36 (ognuno di lunghezza circa 15 cm)¹.

¹ E' noto che dal punto di vista del modello matematico, la soluzione corretta viene colta senza necessariamente definire conci aventi le dimensioni reali del mattone pieno; inoltre, la presenza dell'interfaccia in chiave meglio interpreta la possibile formazione di una cerniera; a tale aspetto, per una volta circolare simmetrica, corrisponde un numero pari di conci.

• Materiali

La muratura viene caratterizzata dalla resistenza a compressione $f_m=6.17 \text{ N/mm}^2$ e dai moduli di elasticità $E=3634 \text{ N/mm}^2$, $G = E/3 = 1211 \text{ N/mm}^2$ avendo utilizzato il rapporto $G=E/3$ che caratterizza in Tab. C8.5.I di NTC18 la muratura esistente in mattoni pieni e malta di calce (la malta utilizzata per la costruzione della volta è di calce di deboli caratteristiche meccaniche).

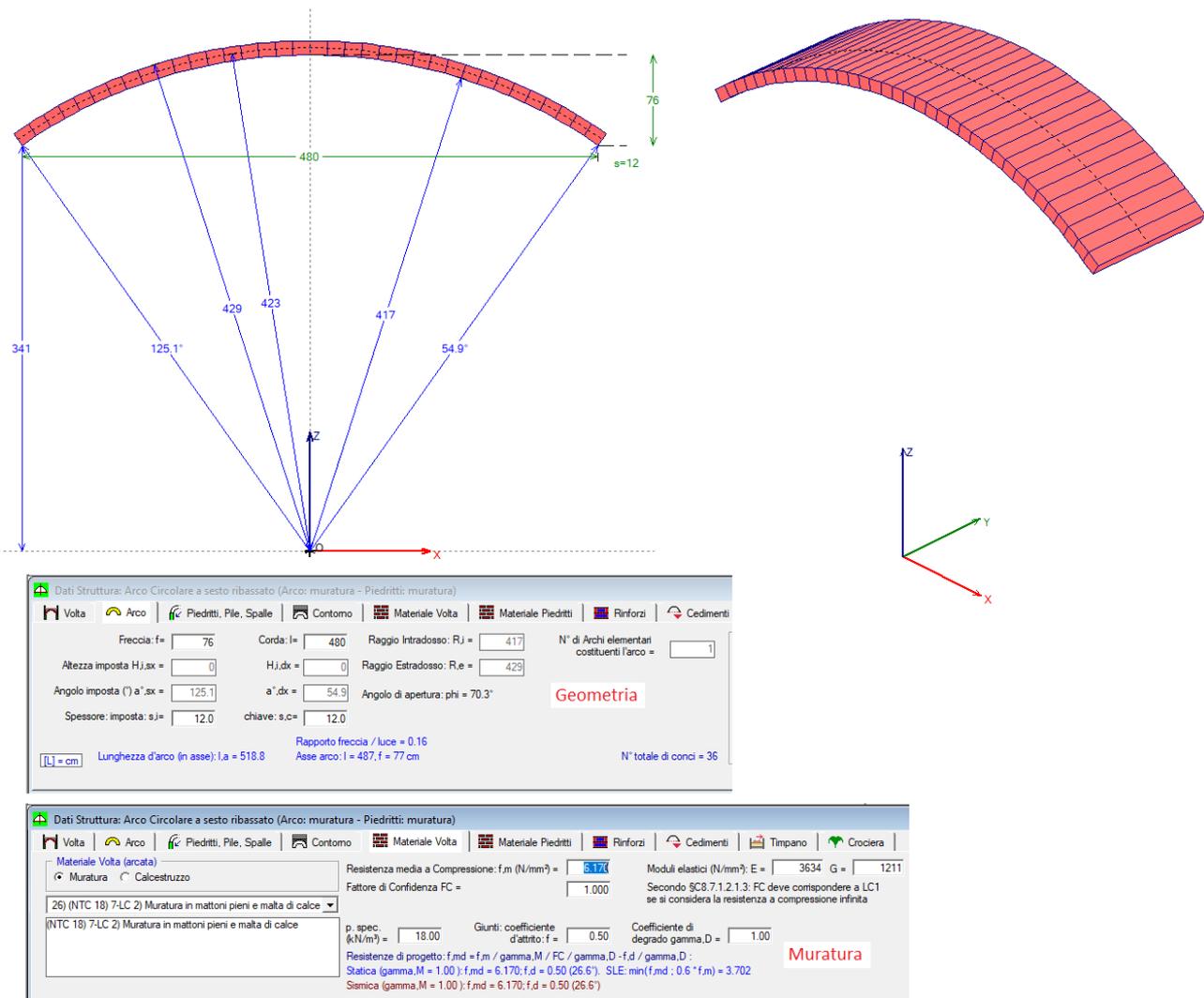


Fig. 7. Modellazione della volta: geometria e materiale murario

• Vincoli

Il vincolamento alle imposte viene assimilato ad un semincastro con debole grado di incastro, come suggerito dalla modalità di realizzazione del vincolo in laboratorio. Poiché in SAV il vincolo alle imposte può essere considerato cerniera (grado di incastro = 0), incastro (grado di incastro = 1), oppure semincastro (grado di incastro compreso fra 0 e 1), si assume un grado di incastro debole pari a 0.1 (fig. 8)².

² Il semincastro corrisponde nel modello alla presenza di una molla di torsione, la cui costante elastica è nulla nel caso di cerniera e infinita nel caso di incastro. La molla di torsione che schematizza il semincastro viene schematizzata con un grado di incastro compreso tra 0 e 1 (il valore 1 corrisponde alla costante elastica della molla di torsione infinita). Come illustrato nell'analisi, il grado di incastro pari a 0.1 ha condotto a risultati congruenti con quanto rilevato sperimentalmente. Ovviamente, nel caso di applicazione del software a casi reali di volte inserite in organismi murari e correttamente vincolate alle murature di imposta, il vincolo da considerare ai fini delle analisi elastica e modale può anche essere assimilato ad un incastro.

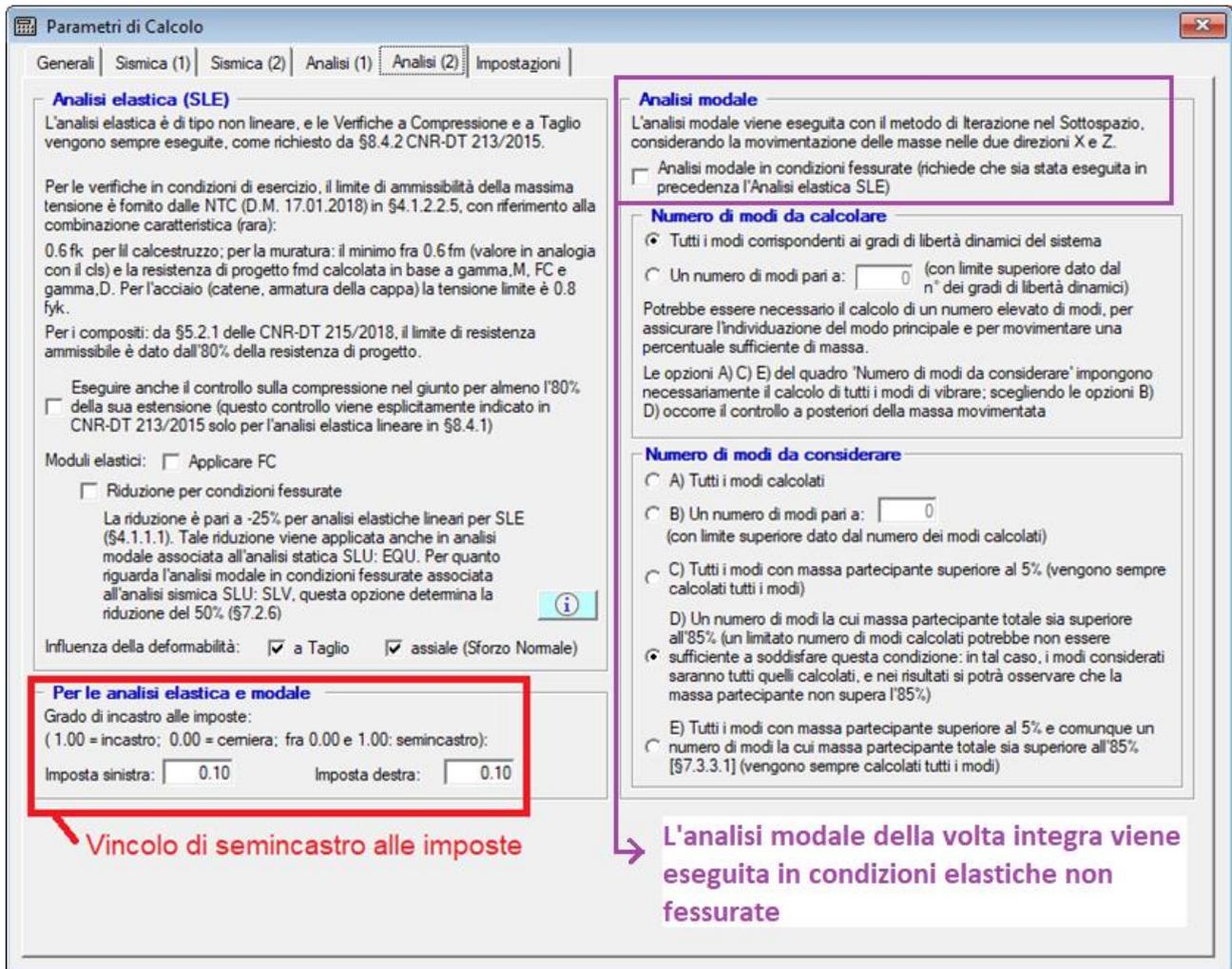


Fig. 8. Parametri di calcolo per analisi elastica e modale

• Carichi

Per quanto riguarda i carichi, la volta integra è sottoposta all'azione del solo peso proprio. In ragione della successiva modellazione di volta sottoposta a danneggiamento attraverso l'applicazione di un carico statico alle reni, sono state già definite in SAV due Condizioni di Carico Elementari (CCE), la CCE 1 corrispondente al peso proprio e la CCE 2 contenente il carico verticale applicato verso l'alto ad 1/4 della luce.

Ai fini dell'analisi della volta integra, la Combinazione di Condizioni di Carico (CCC) esaminata è composta dalla sola CCE 1 (fig. 9), assegnando un moltiplicatore nullo alla CCE 2.

Il carico applicato verso l'alto imposto alla sezione di rene per provocare la fessurazione (i cui effetti saranno esaminati nel paragrafo successivo nell'ambito dello studio del danneggiamento della volta) non è esplicitamente dichiarato dai report della Ricerca; si è assunto un valore pari a 1.50 kN³.

³ Nei dati riportati in fig. 9, si può osservare che la CCE 1, composta dai carichi corrispondenti al peso proprio della volta, genera le masse movimentate dal comportamento dinamico, mentre alla CCE 2, composta da un carico ausiliario il cui fine è il danneggiamento della volta, non sono associate masse.

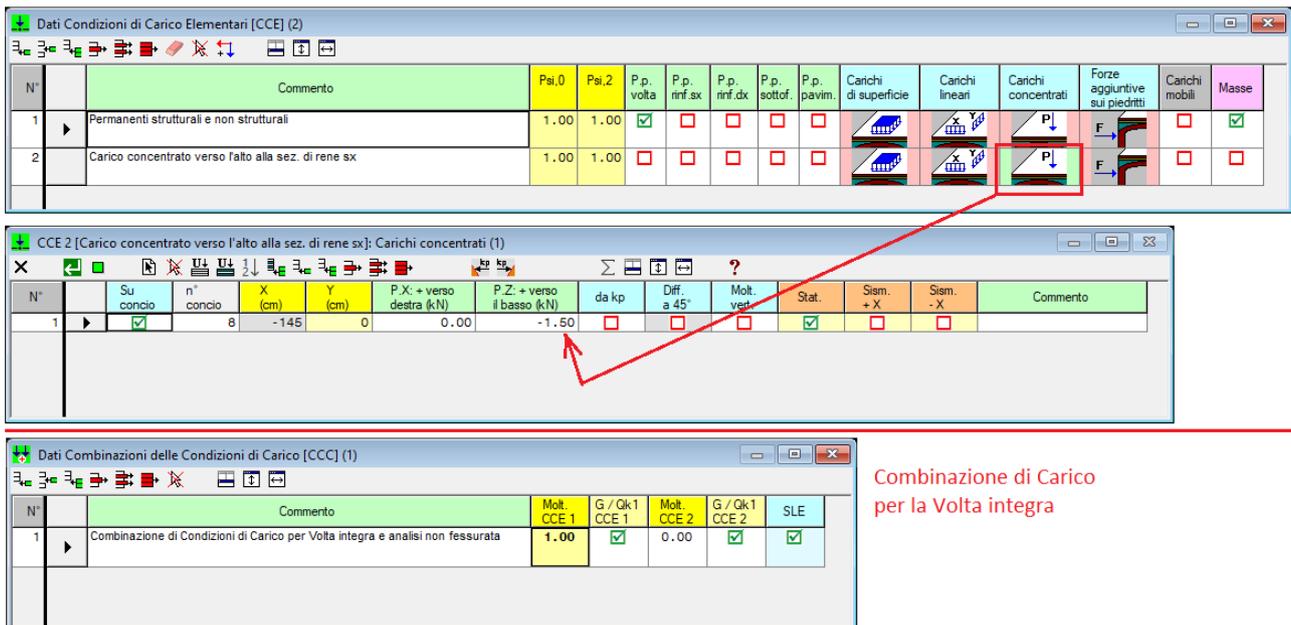


Fig. 9. Condizioni di Carico Elementari e Combinazioni di Condizioni di Carico

Trattandosi della volta integra, l'analisi modale, preceduta dalle analisi limite e dall'analisi elastica, viene eseguita in condizioni elastiche, come evidenziato dall'opzione dei Parametri di Calcolo che consente il riferimento a condizioni elastiche o fessurate (vd. fig. 8).

Il risultato dell'analisi riferito al primo modo di vibrare è riportato in fig. 10, dove sono rappresentate le masse movimentate dalla forma modale corrispondente.

E' importante rilevare che lo studio delle oscillazioni libere nella sperimentazione è stato condotto imponendo uno spostamento δ ad una delle reni, sollecitando il primo modo di vibrare della struttura. Dopo il rilascio della deformazione, la volta ha iniziato ad oscillare rendendo possibile la determinazione delle frequenze ed i modi propri di vibrare della struttura, in particolare del primo modo; gli Autori [1] hanno riservato a future sperimentazioni l'imposizione di uno spostamento iniziale in chiave al fine di imporre il secondo modo di vibrare e valutare la relativa frequenza.

Come mostrato dalla fig. 10, **il primo modo calcolato con l'analisi modale di SAV conferma il massimo spostamento in corrispondenza del quarto della luce**, e fornisce un periodo T_1 pari a 0.083 sec, con frequenza $f_1=12.048$ Hz. Nella sperimentazione si è rilevata una frequenza pari a 11 Hz [1] (precisata in 11.25 Hz in [2]).

In fig. 11 è rappresentato il secondo modo di vibrare, con frequenza pari a 24.390 Hz e bassi valori per le masse movimentate; la forma del secondo modo conferma l'osservazione della possibilità di attivarlo sperimentalmente imponendo una deformazione in chiave.

Esplorando i modi successivi, si può rilevare con SAV il modo principale Z, con massa movimentata in direzione verticale pari al 74.3%, corrispondente al modo 4 con frequenza 50 Hz, ed il modo principale X, con massa movimentata in direzione orizzontale pari al 50.5%, corrispondente al modo 8 con frequenza elevata pari a 152 Hz.

Dal punto di vista dell'identificazione dinamica del comportamento della volta, il modo fondamentale (primo modo) può costituire il riferimento con cui confrontare le proprietà dinamiche della volta nei vari stati (integra, fessurata e rinforzata).

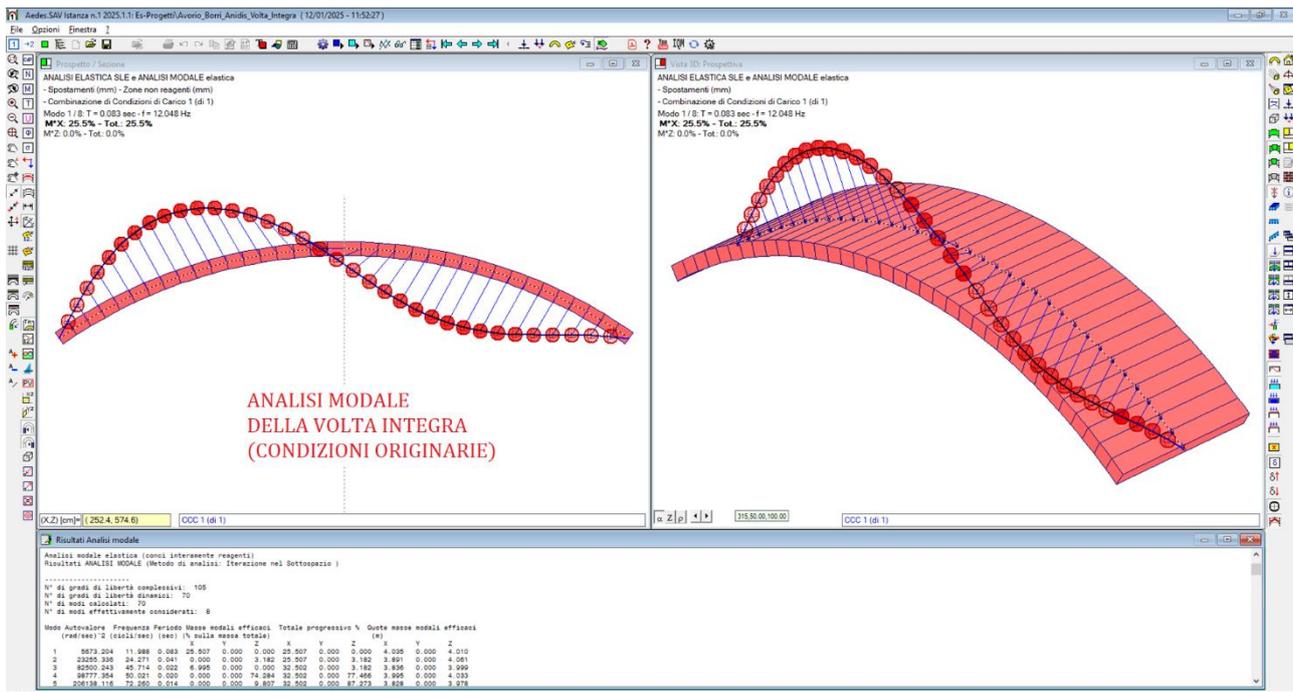


Fig. 10. Analisi modale della volta integra. Risultati relativi al primo modo di vibrare

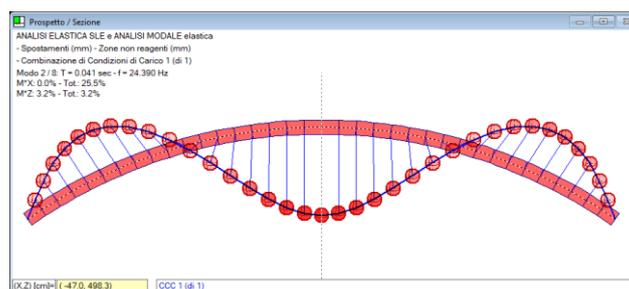


Fig. 11. Analisi modale della volta integra: secondo modo di vibrare

5.2. VOLTA FESSURATA

Durante le fasi della sperimentazione, **dopo la misurazione delle oscillazioni libere della volta integra, la volta è stata danneggiata** applicando un'azione statica indotta da due martinetti idraulici disposti a 1/4 della luce dell'arco, in parallelo, il cui carico era ripartito da un'asse di acciaio disposto trasversalmente alla profondità dell'arco. Come riportato in [1], la forza P è stata applicata in direzione verticale con verso dal basso verso l'alto, finalizzata a generare un quadro fessurativo prossimo al collasso di tipo asimmetrico. Non è noto il valore del carico applicato. In SAV si è modellata questa fase sperimentale inserendo, come già rilevato, un carico verso l'alto pari a 1.50 kN applicato nel concio n°8 (CCE 2) che ha generato in SAV, in analisi elastica non lineare, una fessurazione analoga a quanto descritto nel report della prova sperimentale in particolare riguardo alla zona di applicazione del carico (fig. 12).

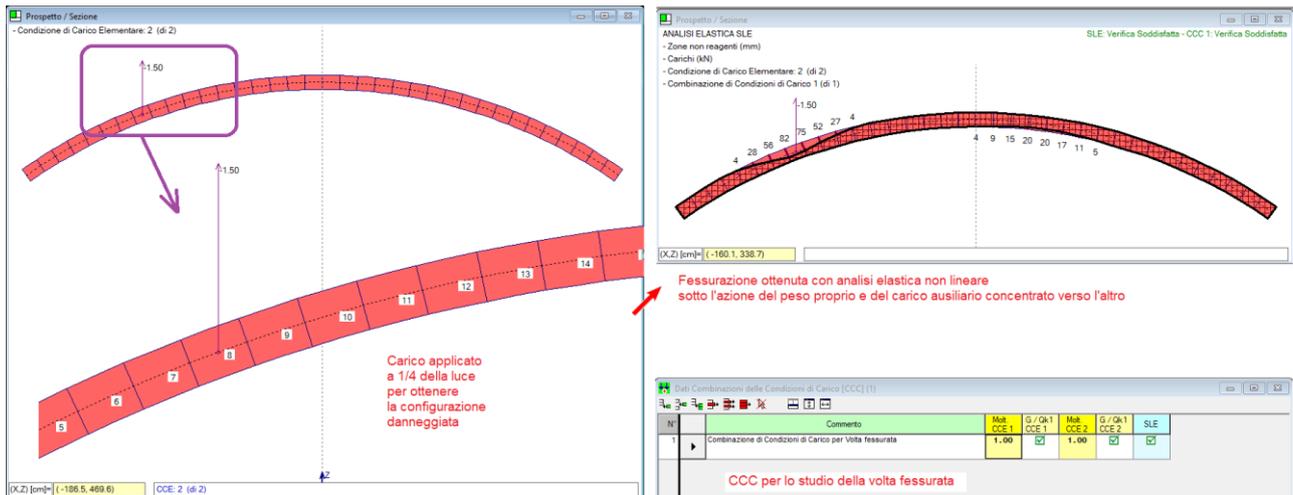


Fig. 12. Modellazione della volta fessurata

Su tale configurazione prodotta dall'analisi elastica non lineare, è stata condotta in SAV l'analisi modale in regime fessurato, riducendo in tal modo la rigidezza degli elementi strutturali laddove la fessurazione ha determinato una riduzione della sezione reagente, come illustrato in fig. 12 dove in tratteggio, all'interno dell'arco, è rappresentato l'arco reagente. Nelle zone indicate dalle cerniere C1 e C3 (fig. 2) si formano le attese fessurazioni sul lato opposto alla cerniera.

Il risultato dell'analisi della volta fessurata riferito al primo modo di vibrare è riportato in fig. 13, dove sono rappresentate le masse movimentate dalla forma modale corrispondente.

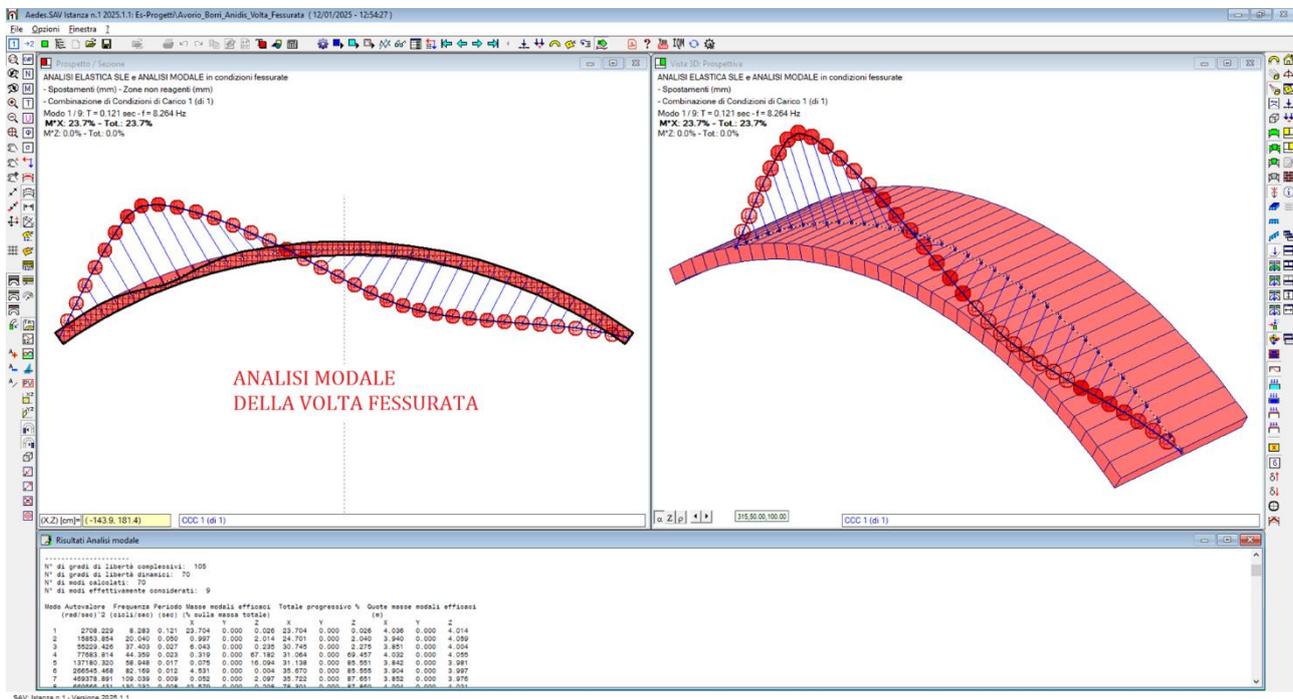


Fig. 13. Analisi modale della volta fessurata. Risultati relativi al primo modo di vibrare

Il primo modo per la volta fessurata calcolato con l'analisi modale di SAV fornisce un periodo T_1 pari a 0.121 sec, con frequenza $f_1=8.264$ Hz. Anche nella sperimentazione si è rilevata una diminuzione della frequenza, che risulta pari a 10.4 Hz [1] (precisata in 10.5 Hz in [2]). Il modello di SAV coglie quindi un maggior effetto del danneggiamento, probabilmente dovuto alle approssimazioni che è stato necessario apportare al modello, riguardanti ad esempio il grado di incastro ed il valore del carico P di danneggiamento. In ogni

caso, la modellazione con il software è in grado di cogliere la riduzione della frequenza propria di vibrare nel passaggio dalla volta integra alla volta fessurata: se il sistema di rinforzo applicato tenderà al recupero della rigidezza perduta, come avviene nella sperimentazione di riferimento, resterà comunque confermata l'adeguatezza dell'approccio con SAV per la definizione della bontà dell'intervento di consolidamento ai fini del ripristino per la volta di condizioni analoghe a quelle dell'integrità originaria.

5.3. VOLTA RINFORZATA

La volta lesionata è stata rinforzata con l'impiego di nastri in GFRP (fig. 3). Nel software SAV è stato definito il rinforzo in estradosso (fig. 14), a cui viene affidato il compito di implementare capacità di resistenza a trazione in corrispondenza delle zone fessurate.

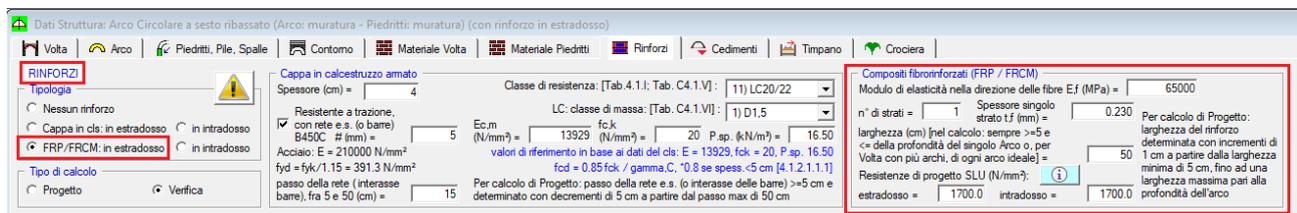


Fig. 14. Parametri in input per la definizione del rinforzo

Come illustrato in precedenza, il modello elastico di SAV è un modello piano costituito da elementi finiti monodimensionali: le aste corrispondono ai conci costituenti l'arcata (volta) e sono collegate tra loro da nodi definiti dai baricentri delle interfacce tra conci.

Quando viene eseguita l'analisi in condizioni fessurate, in presenza di rinforzo le aste rappresentative dei conci possono trovarsi in una delle due situazioni seguenti (fig. 15).

(1) **Nel concio l'arco reagente coincide con l'arco originario**, non sono presenti fessurazioni e la sezione è interamente reagente (compressa). Il rinforzo non fornisce alcun contributo alla rigidezza dell'asta. Nella matrice delle rigidezze i termini $E \cdot A$ e $E \cdot J_y$, rappresentativi della rigidezza assiale e di quella flessionale, sono formati dal modulo di elasticità della muratura e da area e momento d'inerzia della sezione completa del concio.

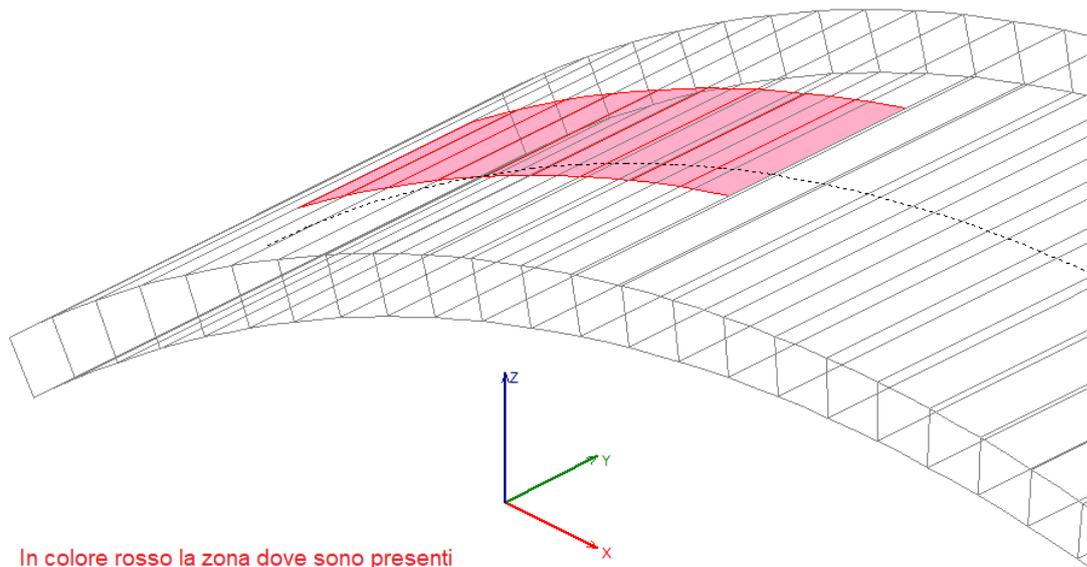
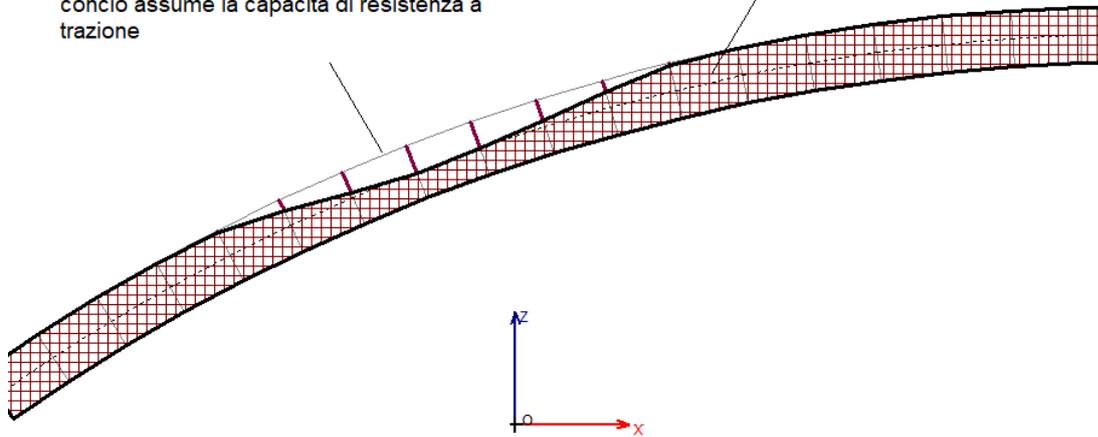
(2) **Il concio è interessato da una zona di fessurazione**: la sezione reagente a compressione è ridotta rispetto alla sezione geometrica del concio, nei termini di rigidezza A e J_y sono corrispondentemente ridotte e si indicano con A^* e J_y^* . Le rigidezze complessive della sezione contengono anche il contributo del rinforzo:

$(E \cdot A)$ originaria (dell'asta integra) diviene: $(E \cdot A^* + E_f \cdot A_f)$, dove E_f è il modulo di elasticità del rinforzo e A_f l'area della sezione trasversale del nastro, data dallo spessore (0.23 mm nel caso in esame) moltiplicato per l'estensione del rinforzo in direzione trasversale (250 + 250 = 500 mm nel caso in esame);

$(E \cdot J_y)$ originaria diviene: $(E \cdot J_y^* + E_f \cdot A_f \cdot (h/2)^2)$ dove h è l'altezza del concio: in questa formulazione si tiene quindi conto del contributo di rigidezza flessionale del rinforzo, essendo il nodo strutturale collocato in posizione baricentrica (a metà altezza del concio).

Nelle sezioni dove la zona reagente si riduce e si manifesta la fessurazione, la sezione reagente è minore della sezione trasversale dei conci. Se è presente il rinforzo dal lato della fessurazione, l'asta rappresentativa del concio assume la capacità di resistenza a trazione

In tratteggio: arco reagente.
Nei conci dove l'arco reagente coincide con l'arco originario, la sezione delle aste è interamente reagente (compressa)



In colore rosso la zona dove sono presenti fessurazioni: la presenza del rinforzo fornisce la capacità di resistenza a trazione

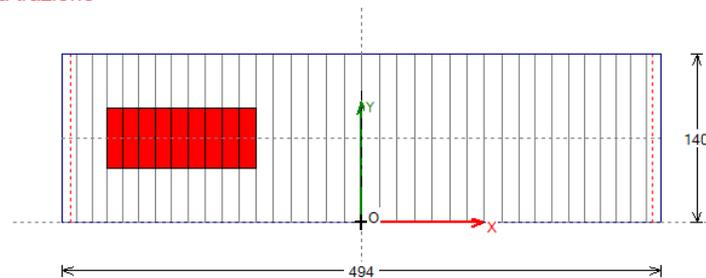


Fig. 15. Zone di fessurazione e rinforzo in estradosso

Mantenendo in input il carico concentrato ausiliario che genera il danneggiamento ed eseguendo l'analisi elastica, che definisce il campo di fessurazione, seguita dall'analisi modale in condizioni fessurate, si ottiene il risultato dell'analisi della volta fessurata rinforzata riferito al primo modo di vibrare e riportato in fig. 16, dove sono rappresentate le masse movimentate dalla forma modale corrispondente.

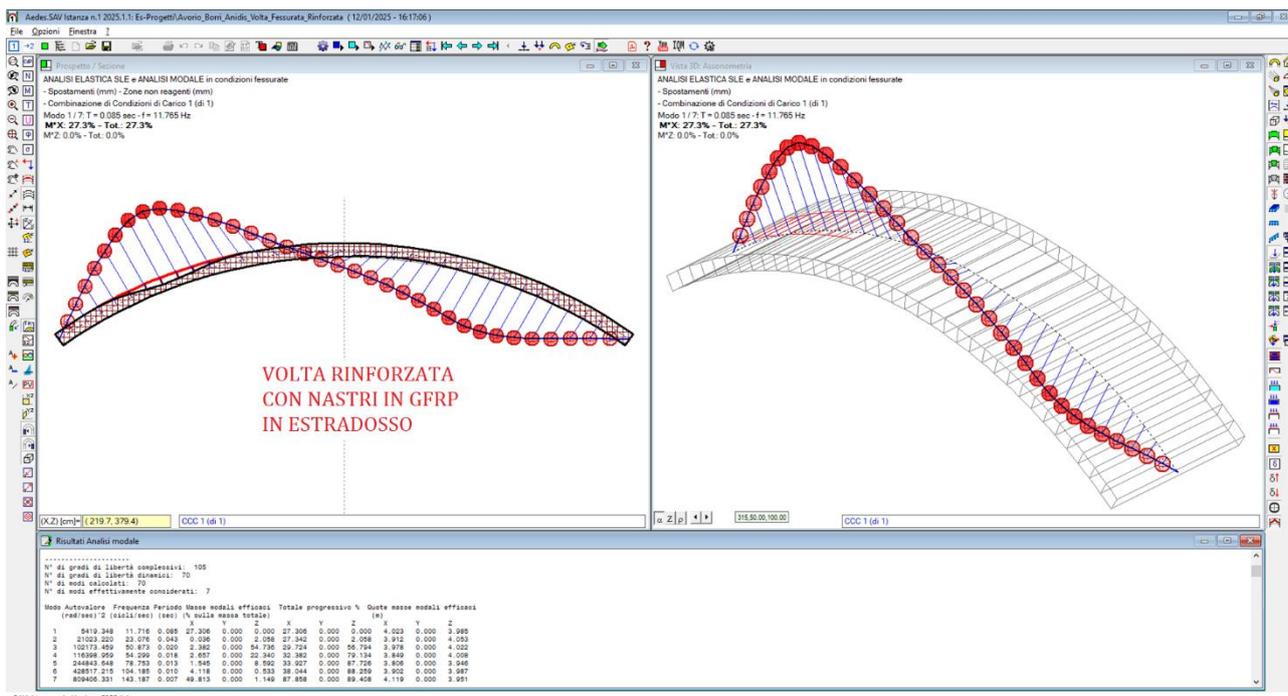
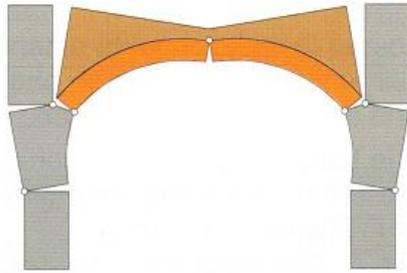


Fig. 16. Analisi modale della volta fessurata rinforzata. Risultati relativi al primo modo di vibrare

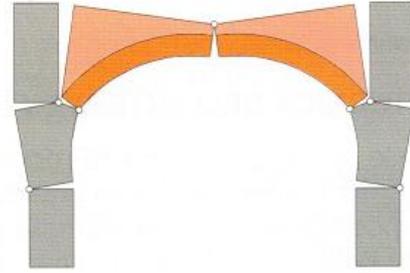
Il primo modo per la volta fessurata rinforzata calcolato con l'analisi modale di SAV fornisce un periodo T_1 pari a 0.085 sec, con frequenza $f_1=11.765$ Hz. Nella sperimentazione si è ottenuto un aumento di frequenza, che risulta pari a 13.12 Hz [1] (precisata in 12.5 Hz in [2]), contro l'originaria 11 Hz della volta integra. Sperimentalmente, la prova dinamica ha mostrato **l'effetto positivo dell'applicazione del rinforzo con materiale composito, il cui contributo si ripercuote in un aumento della rigidezza del sistema in corrispondenza delle sezioni fessurate, ripristinando in sostanza la rigidezza della volta integra originaria.** La modellazione con SAV conferma questo risultato: si consegue infatti una frequenza pari a 11.765 Hz contro l'originaria 12.048 Hz.

Il sistema di rinforzo applicato tende pertanto al recupero della rigidezza perduta a causa del danneggiamento. **La modellazione e l'analisi con il software SAV dimostrano l'adeguatezza dell'approccio per la definizione della bontà dell'intervento di consolidamento ai fini del ripristino per la volta di condizioni analoghe a quelle dell'integrità originaria.** Questi studi confermano l'efficacia delle applicazioni di rinforzi in materiale composito per il miglioramento sismico dei sistemi voltati in muratura.

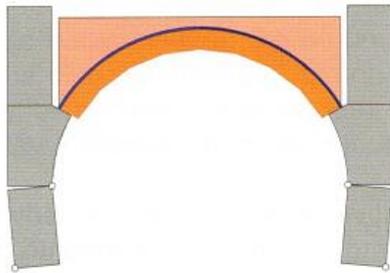
Sul consolidamento di volte e archi con materiali fibrorinforzati vi sono alcune **considerazioni riguardanti le corrette modalità di esecuzione degli interventi.** Rinviando per approfondimenti alla letteratura specializzata (fig. 17) [4], è opportuno osservare che per applicare nastri in materiale fibrorinforzato in estradosso è necessaria una fase di cantiere dove vengono eliminati i rinfianchi. Sarà pertanto necessario prevedere il ripristino di una struttura stabilizzante, generalmente mediante la realizzazione di frenelli in muratura. La modellazione con il software SAV dei casi reali potrà tenere conto di questi aspetti.



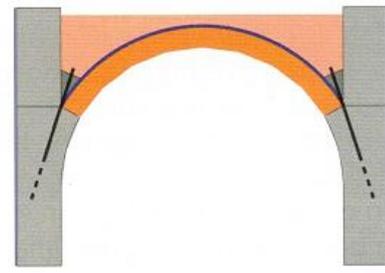
CASO 1 - La volta, in genere, ha rinfianchi riempiti di materiale incoerente. In condizioni statiche essi stabilizzano le reni impedendone l'innalzamento. Problemi possono sorgere in occasione di terremoti: il peso del battuto di detriti, per effetto dell'accelerazione sismica, aumenta la spinta della volta.



CASO 2 - Sostituzione dei rinfianchi con frenelli in laterizio. Il miglioramento risiede essenzialmente nel minor peso. Se i frenelli aderiscono bene alla superficie della volta la cerniera centrale si alza aumentando la stabilità della struttura.



CASO 3 - Se ai frenelli si aggiungono le fibre in composito si può evitare la formazione della cerniera in chiave. In questo caso la volta diviene assimilabile ad un elemento monolitico e il meccanismo si può creare solo per rotazione dei piedritti parzializzati.



CASO 4 - Se si aggiunge un sistema di ancoraggio e un nastro di composito opportunamente dimensionato che ostacoli la formazione della cerniera sul piedritto, i cinatismi più probabili sono eliminati e la volta può assicurare un elevato livello di sicurezza anche in caso di sisma.

Fig. 17. Intervento su una volta con nastri in composito in estradosso e frenelli di laterizio [4]

Si ritiene utile un **confronto tra il consolidamento con GFRP sopra illustrato e la realizzazione di una cappa in calcestruzzo**: un rinforzo troppo irrigidente potrebbe infatti cambiare drasticamente le proprietà dinamiche della volta rispetto a quelle originarie, introducendo modifiche non desiderate nel comportamento strutturale delle pareti di imposta. Si rivela quindi opportuno modellare e analizzare il rinforzo con cappa in calcestruzzo.

Per eseguire il confronto, la struttura voltata viene consolidata in estradosso non con nastri in composito ma con una cappa in calcestruzzo avente spessore 4 cm. Le proprietà del calcestruzzo sono le seguenti: classe di resistenza LC 20/22, modulo di elasticità 13929 N/mm^2 , $f_{ck} = 20 \text{ N/mm}^2$, peso proprio 16.50 kN/m^3 . Nella procedura di calcolo di SAV l'inserimento della cappa determina le seguenti variazioni:

- la dimensione della sezione dell'arco ha un incremento pari allo spessore della cappa (nel caso in esame: da 12 a 16 cm);
- il modulo di elasticità si assume pari alla media pesata di muratura e calcestruzzo in base agli spessori dei due materiali;
- con una media pesata analoga si definisce il peso specifico effettivo del concio composto da muratura e calcestruzzo.

Il risultato dell'analisi della volta fessurata rinforzata con cappa in calcestruzzo posta in estradosso riferito al primo modo di vibrare è riportato in fig. 18, dove sono rappresentate le masse movimentate dalla forma modale corrispondente.

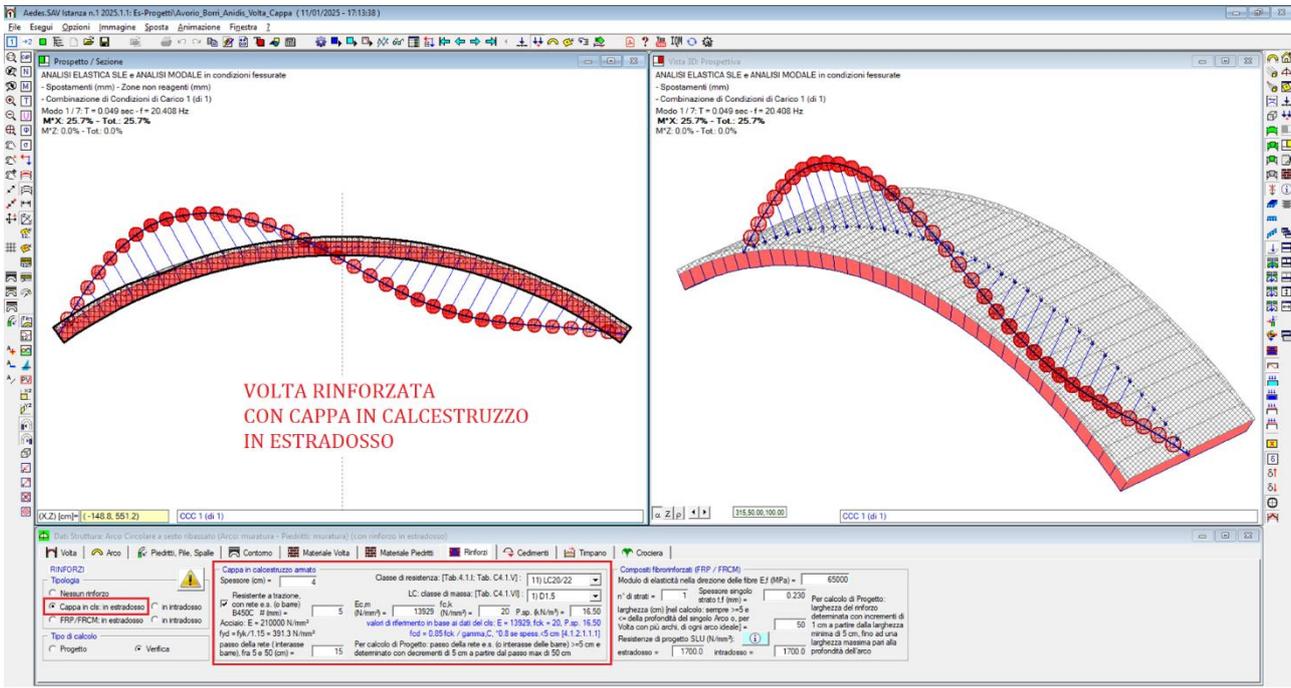


Fig. 18. Analisi modale della volta fessurata rinforzata con cappa in cls in estradosso. Risultati relativi al primo modo di vibrare

Il primo modo per la volta fessurata rinforzata con cappa calcolato con l'analisi modale di SAV fornisce un periodo T_1 pari a 0.049 sec, con frequenza $f_1=20.408$ Hz: si tratta quindi di una frequenza quasi doppia rispetto a quella conseguita col rinforzo in GFRP.

La realizzazione della cappa in calcestruzzo determina un irrigidimento della volta che può essere considerato eccessivo rispetto alle proprietà originarie. In base alla Normativa tecnica vigente (§8.4.1), un intervento locale che riguarda singole parti della struttura non deve cambiare significativamente il comportamento globale della costruzione e deve ripristinare, rispetto alla configurazione precedente al danno, le caratteristiche iniziali di elementi o parti danneggiate. E' evidente che un eccessivo irrigidimento di un solaio voltato non rispetta questa indicazione. Le implicazioni sulla struttura portante globale potrebbero inoltre condurre ad altri interventi sull'organismo murario in contrasto, nel caso di bene culturale, con la giusta calibrazione delle esigenze di sicurezza e di conservazione, come illustrato nel documento normativo dedicato al patrimonio culturale [5].

Per la volta oggetto di studio si riporta infine, nella tabella seguente (tab.I), il **riepilogo dei risultati della sperimentazione confrontati con quelli ottenuti attraverso la modellazione e l'analisi con il software SAV.** Per entrambi i risultati (sperimentali e analitici) si ottiene una riduzione della frequenza per effetto della fessurazione ($f_2 < f_1$) e un sostanziale ripristino della rigidità originaria a seguito del rinforzo con GFRP ($f_3 \geq f_1$), con valori delle frequenze analitiche sostanzialmente simili a quelle di origine sperimentale. Il rinforzo con cappa, non studiato nel test sperimentale, mostra, mediante il modello analitico, un incremento di rigidità eccessivo rispetto al valore originario ($f_4 \gg f_1$) che rende il tipo di intervento più problematico rispetto al rinforzo con materiali compositi.

Frequenza f (Hz)	Condizioni della volta	Test sperimentale	Analisi modale con Aedes.SAV	
f_1	Integra	11.00	12.048	
f_2	Fessurata	10.40	8.264	$f_2 < f_1$
f_3	Fessurata rinforzata con GFRP	13.12	11.765	$f_3 \geq f_1$
f_4	Fessurata rinforzata con cappa in cls		20.408	$f_4 \gg f_1$

Tab. 1. Confronto fra risultati sperimentali e analitici ottenuti con il software Aedes.SAV

CONCLUSIONI

Nel presente lavoro, è stata illustrata l'applicazione del software professionale Aedes.SAV, dedicato all'analisi delle strutture murarie voltate, per lo studio delle proprietà dinamiche delle volte, valutando attraverso l'analisi modale le caratteristiche originarie di un sistema voltato, quelle legate ad uno stato di danneggiamento ed infine le proprietà implementate attraverso l'applicazione di un rinforzo in composito.

L'indagine è stata condotta con un puntuale riferimento ai contenuti di articoli scientifici sul comportamento dinamico delle volte in muratura, con particolare riferimento al rinforzo con materiali compositi.

Il confronto fra i risultati sperimentali e quelli analitici ha mostrato valori delle frequenze e delle loro variazioni sostanzialmente simili, evidenziando che rispetto alla volta integra originaria lo stato di danneggiamento comporta una riduzione della frequenza e che è possibile conseguire un ripristino della rigidità originaria progettando un rinforzo con materiali compositi.

L'analisi dei risultati costituisce validazione della procedura software utilizzata.

Si è infine constatato come l'intervento di rinforzo con compositi risulta preferibile alla classica realizzazione di una cappa in calcestruzzo, il cui effetto di irrigidimento eccessivo contrasta con le esigenze di ripristino delle capacità e potrebbe introdurre nel comportamento dinamico modifiche tali da alterare la concezione originaria della struttura e la sua modalità di risposta alla sollecitazione sismica.

BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO

- [1] Avorio A., Borri. A., Corradi M., Barbieri A., Di Tommaso A.: Comportamento dinamico di volte in muratura rinforzate con FRP-materials: primi risultati, X Congresso Nazionale "L'Ingegneria Sismica in Italia", Anidis, 2001.
- [2] Corradi M., Borri. A., Castori G., Coventry K.: Experimental Analysis of Dynamic Effects of FRP Reinforced Masonry Vaults, Materials · November 2015, DOI: 10.3390/ma8125445
- [3] Aedes.SAV, Aedes Software, versione 2025 (in corso di pubblicazione)
- [4] Manuale delle Murature Storiche, Direttore Scientifico: Antonio Borri, a cura di Chiara Donà e con la collaborazione di Alessandro De Maria, DEI, Tipografia del Genio Civile, 2011.
- [5] Direttiva del Presidente del Consiglio dei Ministri 9.2.2011: Valutazione e riduzione del rischio sismico del patrimonio culturale con riferimento alle Norme tecniche per le costruzioni di cui al decreto del Ministero delle infrastrutture e dei trasporti del 14 gennaio 2008.