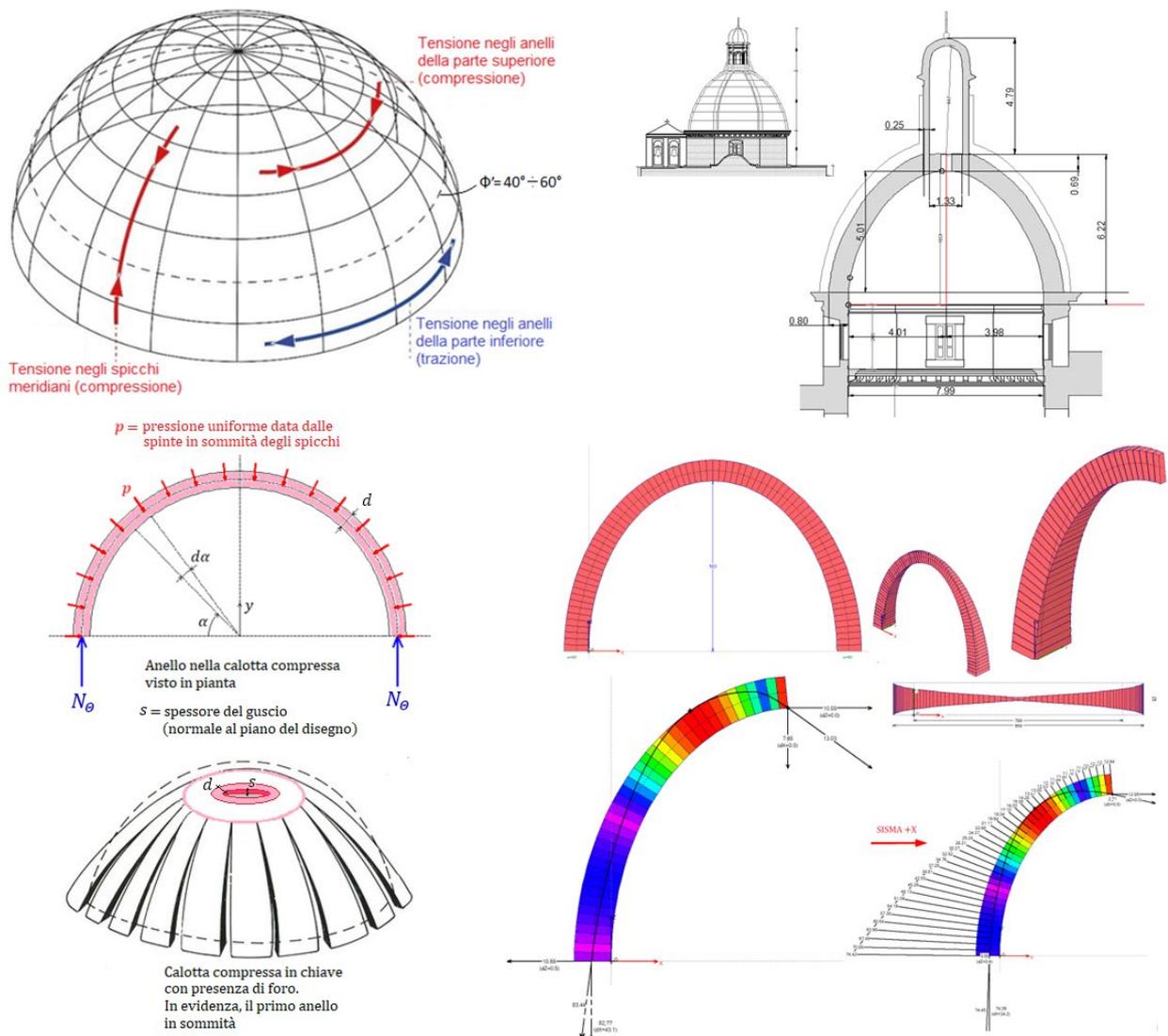


CUPOLE IN MURATURA: COMPORTAMENTO STATICO E SISMICO

* Ricerca e Sviluppo di AEDES Software, francesco.pugi@aedes.it, www.aedes.it

- La cupola in muratura è una **struttura spaziale a volta** dove l'intradosso e l'estradosso sono costituiti da **due superfici di rivoluzione** aventi lo stesso asse verticale e diverse forme geometriche, che possono essere pensate come ottenute dalla rotazione ad esempio di un arco semicircolare o ellittico.
- A differenza della **calotta superiore, compressa** in entrambe le direzioni meridiana e parallela, **nella parte inferiore della cupola sono presenti sollecitazioni di trazione lungo i paralleli**: quando la loro intensità raggiunge la debole resistenza a trazione della muratura, iniziano a comparire i primi danni, ossia **fessurazioni lungo i meridiani** che si manifestano a partire dalla base della cupola. **La cupola, fessurandosi, si suddivide in tanti spicchi che si comportano come archi indipendenti.**
- **La cupola è stabile se è possibile definire una curva delle pressioni interna allo spessore dello spicchio.** L'analisi statica e sismica del semiarco corrispondente allo spicchio, con conseguente **verifica di sicurezza**, può essere svolta mediante analisi limite su **modello rigido-fragile, utilizzando il software professionale Aedes.SAV.**



INDICE

[1. Le cupole in muratura. Comportamento statico e criteri di modellazione e analisi](#)

[2. Analisi di una cupola in muratura con il software Aedes.SAV](#)

[2.1. Modellazione della cupola](#)

[2.2. Analisi statica](#)

[2.3. Analisi sismica](#)

[Conclusioni](#)

[Bibliografia di riferimento](#)

1. LE CUPOLE IN MURATURA. COMPORTAMENTO STATICO E CRITERI DI MODELLAZIONE E ANALISI

La cupola in muratura è una struttura spaziale a volta dove l'intradosso e l'estradosso sono costituiti da due superfici di rivoluzione aventi lo stesso asse verticale e diverse forme geometriche, che possono essere pensate come ottenute dalla rotazione ad esempio di un arco semicircolare o ellittico (fig. 1)

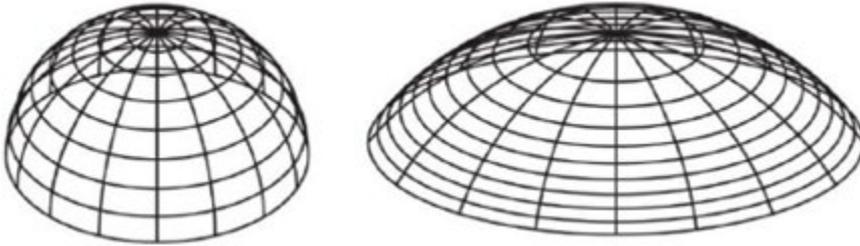


Fig. 1. La cupola come superficie di rivoluzione, con meridiani e paralleli

Le sezioni orizzontali sono i 'paralleli', i semiarchi delle sezioni verticali sono i 'meridiani'. Dal punto di vista geometrico, la cupola può quindi essere pensata come una serie di spicchi o archi affiancati, tutti uguali e disposti lungo i meridiani, collegati fra loro da fasce di paralleli (anelli). Sotto l'azione di carichi a simmetria assiale, lo stato di sollecitazione può essere considerato di tipo 'membranale': la deformazione della cupola tende a flettere gli spicchi meridiani ma è frenata dalla deformazione degli anelli. Di conseguenza, le azioni flettenti sono molto basse e le sollecitazioni sono di tipo estensionale e sostanzialmente uniformi nello spessore del guscio.

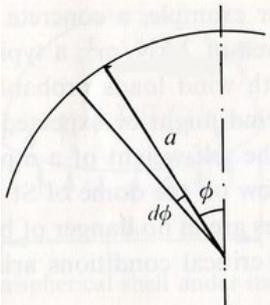


Fig. 2. Colatitudine, crescente dal vertice della cupola verso la base [1]

La fig. 2 mostra il meridiano circolare che rappresenta la cupola, avente raggio a . I punti lungo il meridiano sono identificati dall'angolo Φ (detto 'colatitudine', complemento della latitudine usata nella geografia terrestre). Per esaminare le risultanti degli sforzi all'interno del guscio, si considera un elemento superficiale infinitesimo determinato da due meridiani e due paralleli adiacenti (fig. 3). L'elemento viene individuato dalla colatitudine Φ e dalla longitudine Θ (fig. 4).

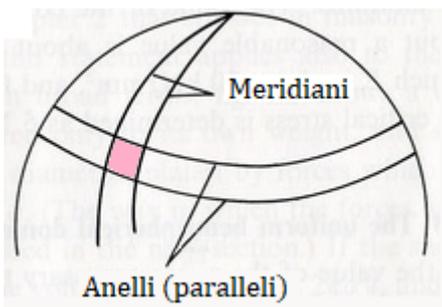


Fig. 3. Elemento definito da due meridiani e due paralleli (da [1])

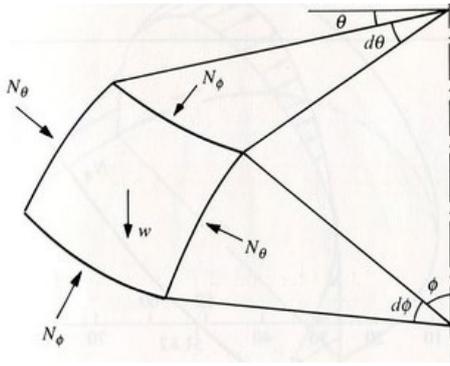


Fig. 4. Equilibrio dell'elementino di guscio (da [1])

La fig. 4 mostra le risultanti degli sforzi che agiscono sui bordi dell'elementino e ne assicurano l'equilibrio sotto il peso proprio (indicato con w):

N_ϕ agisce lungo la direzione del meridiano, ed è variabile lungo il meridiano;

N_θ agisce in direzione circonferenziale lungo i paralleli: a causa della simmetria assiale, è costante lungo lo stesso parallelo ma è variabile con Φ .

Studiando l'equilibrio, si ricavano i valori di N_ϕ e N_θ (per le espressioni degli sforzi si rinvia a [1] [2]), diagrammati in fig. 5, dove i valori negativi indicano compressione e i positivi trazione.

N_ϕ è di compressione lungo tutto lo sviluppo del meridiano e cresce dalla sommità alla base.

La risultante degli sforzi circonferenziali N_θ è di compressione nella calotta superiore compresa fra il vertice della cupola e la colatitudine Φ' pari a $51,82^\circ$ per la cupola circolare (e, in generale, compresa tra 40° e 60°); nella parte sottostante della cupola, N_θ diviene di trazione e il suo valore aumenta rapidamente con l'aumento di Φ , cioè procedendo verso la base.

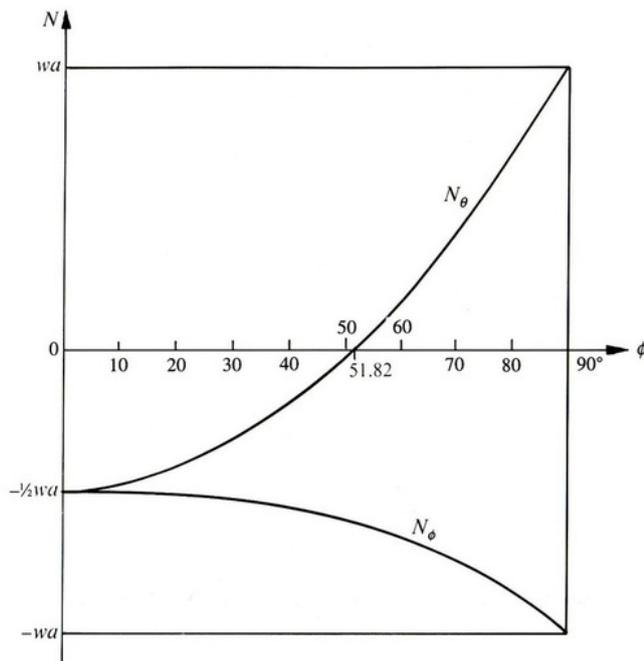


Fig. 5. Valori delle risultanti degli sforzi in una semisfera dal vertice ($\Phi=0^\circ$) alla base ($\Phi=90^\circ$) (da [1])

La fig. 6 mostra come sotto il carico verticale a simmetria assiale (peso proprio) la tensione negli archi meridiani è sempre in compressione, mentre le tensioni degli anelli sono di compressione nella parte superiore alla colatitudine Φ' e di trazione nella parte inferiore.

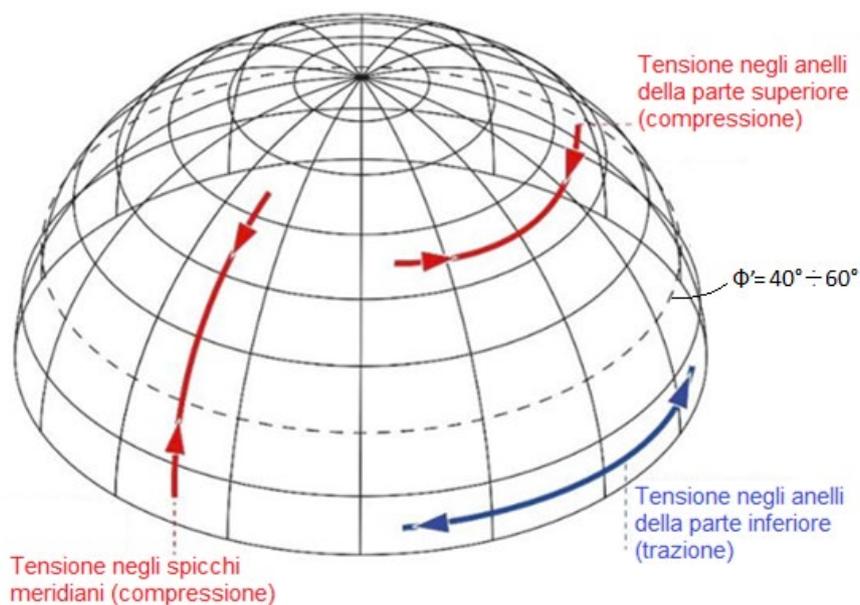


Fig. 6. Stato tensionale nella cupola (soluzione membranale)

Nella parte inferiore della cupola sono pertanto presenti sollecitazioni di trazione lungo i paralleli: **quando la loro intensità raggiunge la debole resistenza a trazione della muratura, iniziano a comparire i primi danni, ossia fessurazioni lungo i meridiani** che si manifestano a partire dalla base della cupola. Le lesioni investono una fascia della cupola ben più alta di quella interessata dalle sollecitazioni di trazione relative all'equilibrio membranale. La cupola, fessurandosi, si suddivide in tanti spicchi che si comportano come archi indipendenti. Nella parte fessurata della cupola vengono meno gli sforzi N_ϕ , e la curva delle pressioni, lungo la quale agiscono gli sforzi N_ϕ , abbandona la superficie media della cupola e si inclina sull'orizzontale: gli spicchi della cupola trasmettono pertanto una spinta alla struttura di sostegno, tamburo con pilastri sottostanti (fig. 7).

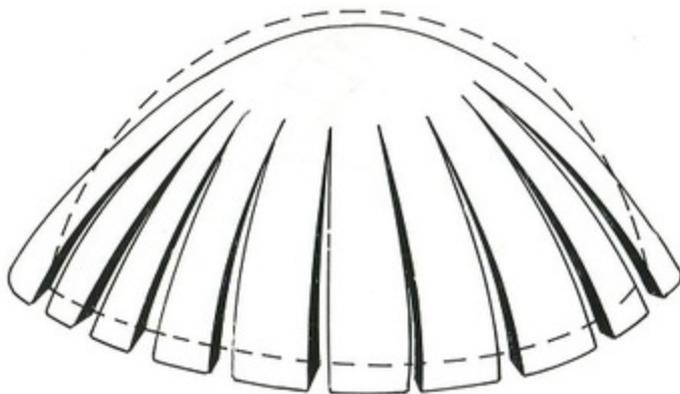


Fig. 7. Illustrazione schematica (molto amplificata) della fessurazione nella cupola [1]

La spinta all'imposta è la conseguenza statica più rilevante della fessurazione meridiania della cupola muraria. La spinta impegna le strutture di sostegno della cupola (tamburo e sottostanti pilastri), che a questo punto devono assorbire non più solo carichi verticali ma anche spinte radiali: sotto l'azione di queste spinte le strutture di sostegno si deformano allargandosi radialmente. In definitiva:

- dalla chiave (sommità) fino a un valore della colatitudine pari a circa 20° [1] la cupola è intatta, e i paralleli sono soggetti a forze di compressione;
- al di sotto, la cupola si separa in spicchi divisi da fessure disposte lungo i meridiani.

Ponendo nulla la sollecitazione lungo i paralleli, l'iperstaticità del problema originario è ridotta e se la

struttura risulterà in equilibrio così suddivisa in spicchi, lo sarà ancora di più considerando il contributo delle pressioni circonferenziali nella parte alta (la calotta non fessurata), le quali sicuramente contribuiscono alla stabilità d'insieme.

Si può così applicare il 'teorema statico' secondo Heyman [1] per cui la cupola, o meglio: lo spicchio che la rappresenta, risulta stabile qualora sia possibile definire una qualunque linea delle pressioni all'interno del suo spessore. La risoluzione dell'arco viene eseguita pertanto con l'analisi limite sul modello rigido-fragile, metodo che interpreta la teoria di Heyman e viene applicato in generale allo studio degli archi in muratura. Se è garantita la stabilità dello spicchio di fig. 8, allora l'intera cupola si sostiene.

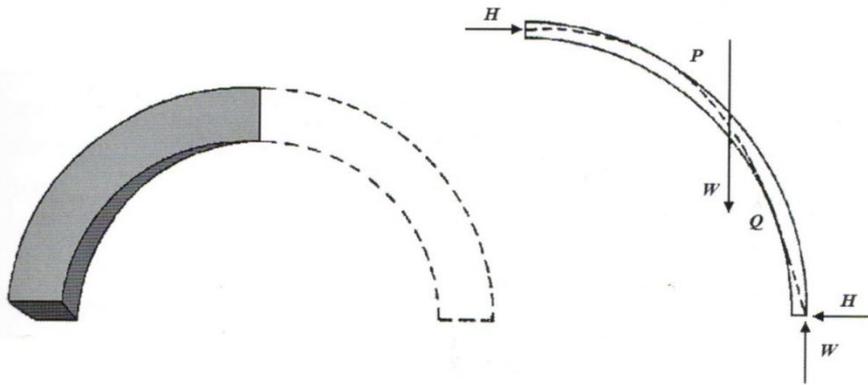


Fig. 8. Spicchio meridiano: arco di cui deve essere garantita la stabilità [3]

In fig. 8 la spinta H in chiave rappresenta l'azione di compressione radiale esercitata dall'insieme degli archi sull'anello di sommità, nella zona della calotta esente da fessurazione.

Studiando l'equilibrio dell'anello, è quindi possibile ricavare lo sforzo di compressione in direzione circonferenziale lungo i paralleli. Nella teoria membranale, lo sforzo circonferenziale in sommità N_θ (per unità di lunghezza) è pari a $(1/2) \cdot w \cdot a$, con w carico per unità di superficie: $w = \rho \cdot s$, essendo ρ il peso specifico della muratura, s lo spessore del guscio e a il raggio dell'arco circolare (raggio della cupola semisferica, vd. fig. 2) ed è uguale allo sforzo in direzione meridiana N_ϕ (fig. 5).

Una formulazione più generale della **compressione lungo l'anello nella calotta superiore** può essere ottenuta dalla risoluzione con analisi limite (studiando la curva delle pressioni) dell'arco in muratura, che può avere geometria varia (ad esempio, non solo circolare ma ellittica) e può essere sottoposto anche ad altri carichi oltre al peso proprio, come il carico della lanterna in sommità. L'analisi fornisce la spinta H (vd. fig. 8). Per un numero di archi pari a n (gli spicchi in cui la cupola è stata suddivisa) si ottiene un carico radiale $p = n \cdot H / (2\pi R \cdot s)$, pressione che agisce sulla calotta superiore compressa di raggio medio R e di spessore s (pari allo spessore del guscio). Per l'equilibrio nella direzione y (fig. 9) si ha:

$$\int_0^\pi p \cdot s \cdot (R \cdot d\alpha) \cdot \text{sen}\alpha = 2N$$

da cui: $N = p \cdot s \cdot R$

Per l'anello di sommità la dimensione lo sviluppo lungo il meridiano è indicata con d (d può essere assunta ad esempio pari allo spessore s , attribuendo all'anello una sezione quadrata). L'area della sezione su cui agisce N è dunque $(s \cdot d)$. Ipotizzando una tensione normale di compressione σ_c uniforme, si ha:

$$N_\theta = \sigma_c \cdot s \cdot d$$

e pertanto: $p \cdot s \cdot R = \sigma_c \cdot s \cdot d \Rightarrow \sigma_c = p \cdot R / d = n \cdot H / (2\pi \cdot s \cdot d)$

La verifica di compressione della calotta compressa nella direzione circonferenziale dei paralleli consiste nel confronto: $\sigma_c \leq f_{md}$, essendo f_{md} la resistenza a compressione di progetto.

La tensione di compressione in direzione circonferenziale nell'anello superiore determina una resistenza a taglio grazie al coefficiente d'attrito: assumendo che questo sia pari a 0.5, si ottiene un taglio resistente pari a: $\tau = 0.5 \cdot \sigma_c$ che si esplica sul giunto fra conci in direzione circonferenziale. Questo taglio resistente svolge un ruolo fondamentale per il sostegno di un carico in sommità prodotto da un'eventuale lanterna.

E' possibile infatti che la sommità della cupola sia aperta e può anche essere presente una lanterna.

Tale configurazione non determina alcuna modifica sull'impostazione di analisi illustrata, e questo distingue nettamente la cupola dall'arco: per un arco, infatti, la rimozione di un qualsiasi concio (che sia o no la chiave) romperebbe la 'catena' di equilibrio e condurrebbe ad un collasso immediato. Nella cupola, invece, gli sforzi sono distribuiti in due direzioni (fig. 4).

L'anello di sommità, grazie alla resistenza per attrito determinata dalla compressione circonferenziale lungo l'anello, è in grado di sostenere l'eventuale carico della lanterna, carico che si traduce in un 'taglio' nella zona di sommità dello spicchio, laddove la lanterna si imposta.

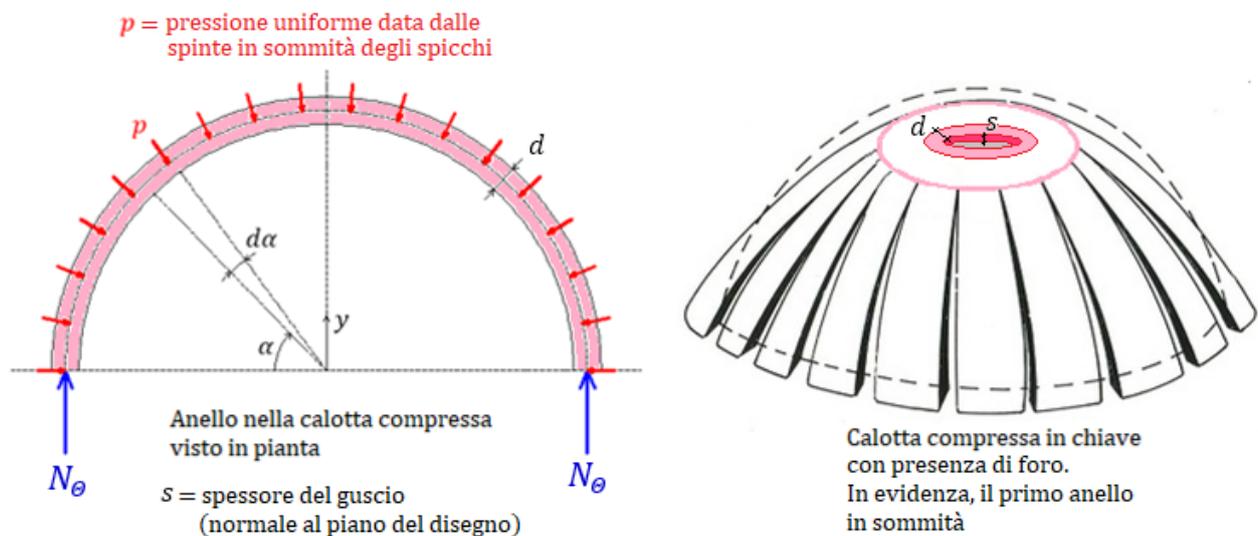


Fig. 9. Calotta compressa in chiave, con presenza di foro e compressione circonferenziale nell'anello di sommità

Le verifiche di sicurezza possono essere completate controllando, oltre alla stabilità, le resistenze per compressione e per taglio lungo lo sviluppo meridiano dello spicchio.

In fig. 10 viene riassunto il modello di fessurazione delle cupole con formazione del meccanismo di collasso: dopo la formazione delle crepe lungo i meridiani si ha la crisi flessionale dello spicchio, con apertura delle cerniere.

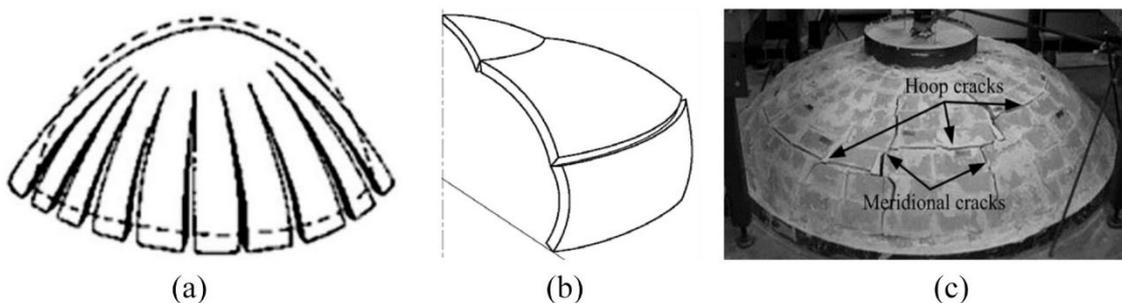


Fig. 10. Schema di comportamento della cupola con le tipiche fessurazioni lungo i meridiani (a) ed il meccanismo di flessione dello spicchio (b); in (c) si evidenziano tutte le fessurazioni, lungo i meridiani e ad anello [4]

Per quanto riguarda gli interventi di consolidamento, la realizzazione di cerchiature ad anello metalliche (utilizzate anche in passato) o in composito FRP (fasciature poste lungo i paralleli) è capace di impedire il distacco fra i diversi elementi e quindi il meccanismo di collasso degli spicchi (fig. 11).

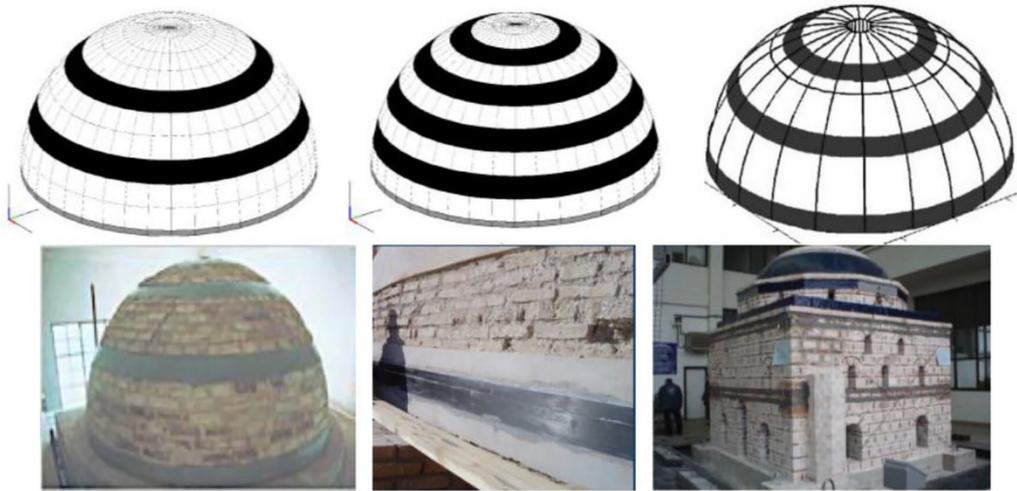


Fig. 11. Cerchiature con fasce FRP applicate all'esterno e all'interno, con diverse configurazioni [4]

In definitiva, lo studio di stabilità statica di una cupola (con sommità sia chiusa, sia aperta e quindi anche nel caso di sovrastante lanterna) può essere ricondotto all'analisi di stabilità di un arco rampante, dalla base alla sommità, determinato dalla suddivisione in spicchi: l'arco avrà quindi una profondità massima all'imposta e minima in sommità, ed uno spessore che potrà essere o meno costante, coincidente con lo spessore della cupola stessa. Le azioni all'imposta di base forniranno le sollecitazioni trasmesse alle strutture sottostanti (tamburo e pilastri) per la loro successiva verifica di sicurezza, generalmente condotta tramite meccanismi di ribaltamento fuori piano.

Fin qui per l'approccio riguardante la verifica di sicurezza statica. Prima di identificare le modalità di esecuzione della verifica sismica, è opportuno focalizzare l'attenzione sulle **cause più frequenti di dissesto per le cupole:**

- (a) strutture di sostegno (tamburo con sottostanti pilastri o muri) insufficienti;
- (b) movimenti (traslazioni, cedimenti) dei pilastri o muri di imposta;
- (c) degrado dei materiali costituenti.

(a) L'idoneità o meno delle strutture di sostegno verrà accertata eseguendo verifiche di stabilità in condizioni statiche e sismiche: nel caso sismico, le spinte sono incrementate rispetto al valore statico e vengono calcolate attraverso l'analisi sismica dell'arco (o spicchio) rappresentativo della cupola. L'analisi sismica dell'arco si conduce applicando le forze sismiche corrispondenti alle masse, secondo i parametri sismici della zona di ubicazione della struttura.

(b) I movimenti delle imposte possono essere studiati attraverso un'analisi per cedimenti. Con i modelli di tipo rigido-fragile, l'analisi per cedimenti richiede che al movimento dell'imposta si associ la formazione di 3 cerniere, in modo tale che l'arco possa assumere una configurazione statica equilibrata diversa da quella originaria. In dipendenza dallo spessore del guscio e dalla forma dell'arco di rivoluzione, la soluzione staticamente e cinematicamente ammissibile corrispondente alla configurazione geometrica deformata può non essere identificabile o condurre a cedimenti molto piccoli: in tali casi è consigliabile verificare stabilità e resistenza attraverso l'analisi dell'arco sottoposto alle forze sismiche.

(c) Il degrado dei materiali costituenti è certamente una fonte di comportamento statico (e a maggior

ragione sismico) critico. Il degrado viene tradotto in verifiche di resistenza (taglio, compressione) più penalizzanti e può essere descritto intervenendo sui parametri meccanici del materiale attraverso valutazioni di qualità muraria. Può essere anche applicato un coefficiente di degrado γ_D che riduce la resistenza di progetto (indicazioni di riferimento su γ_D per murature di sistemi voltati si trovano in §6.5.4 delle istruzioni CNR-DT 213/2015 per la valutazione della sicurezza strutturale di ponti stradali in muratura: sono proposti valori di γ_D compresi fra 1.00 e 1.20).

In ogni caso, deve essere condotta la verifica di stabilità e di resistenza dell'arco sottoposto alle forze sismiche. Applicando allo spicchio un campo di forze nella direzione del suo piano medio, diretto in un verso e nell'opposto si potranno accertare gli effetti dovuti al comportamento sopravvento (arco investito nel verso dall'esterno verso l'interno) e a quello sottovento (verso opposto), studiando quindi il singolo spicchio nelle diverse condizioni sismiche in cui può trovarsi.

Nel paragrafo seguente verrà illustrato l'applicazione del software Aedes.SAV [5] ad un caso studio per l'analisi di stabilità statica e sismica di una cupola in muratura attraverso il metodo dell'analisi limite.

2. ANALISI DI UNA CUPOLA IN MURATURA CON IL SOFTWARE Aedes.SAV

In questo paragrafo viene studiata una cupola appartenente ad una chiesa (fig. 12) di grandi dimensioni e sormontata da una lanterna ottagonale.

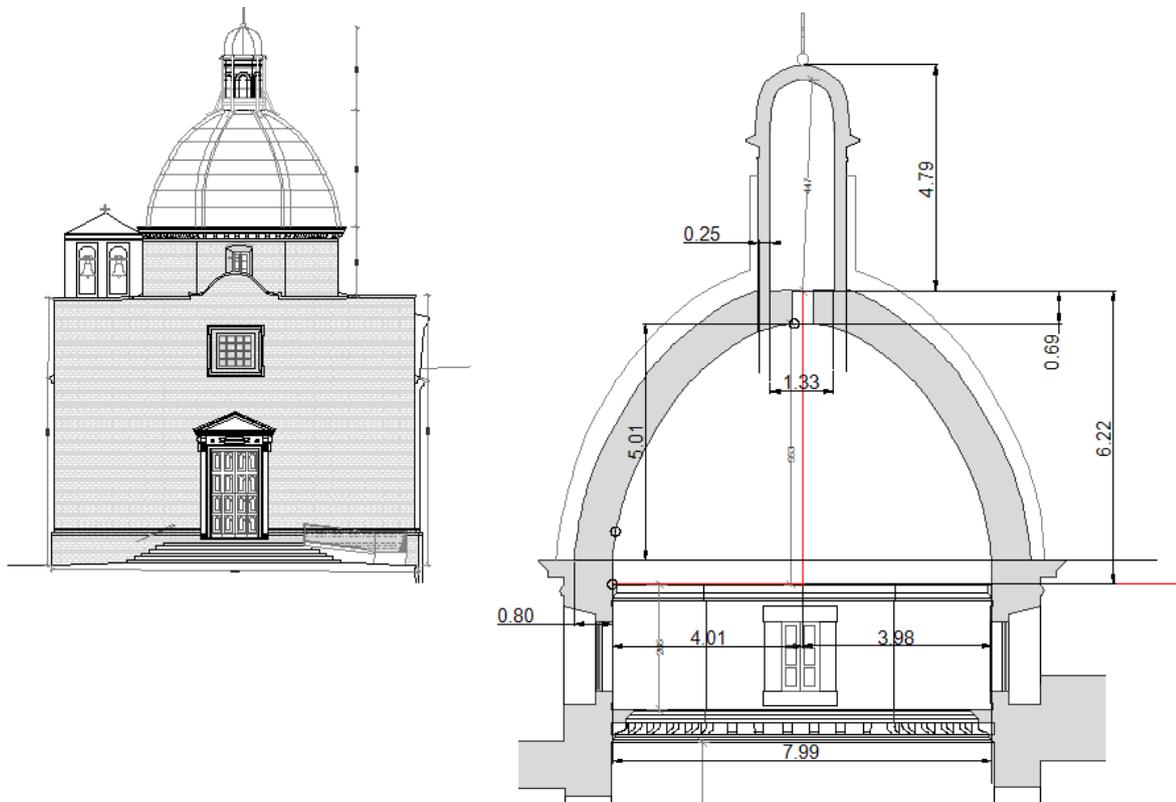


Fig. 12. Elaborati grafici di rilievo (si ringrazia l'Ing. Alberto Cocciglia)

Si tratta di una cupola non semisferica, che può essere considerata generata dalla rivoluzione di un arco ellittico: l'asse orizzontale di base è 799 cm, il semiasse verticale è 553 cm (622 - 69, vd. fig. 13).

Lo spessore della cupola, in muratura di mattoni pieni per l'intero spessore, è variabile ed è pari a 80 cm all'imposta e 69 cm in sommità.

In chiave, l'apertura verso la lanterna è di 45 cm.; la lanterna misura 183 cm di diametro esterno ed è alta 479 cm, con pareti di spessore 25 cm. La cupola è rivestita da lastre in piombo.

La circonferenza di base ha lunghezza $2\pi \cdot 799 = 5018$ cm. Suddividendo idealmente la cupola in 20 spicchi, corrispondenti a semiarchi affiancati, questi presentano una profondità di base pari $5018/20=251$ cm.

In sommità, la circonferenza è pari a $2\pi \cdot 45=283$ cm, e ogni spicchio ha profondità pari a $283/20=14$ cm.

Il singolo semiarco della cupola è quindi un arco ellittico, con asse orizzontale 799 cm e semiasse verticale 553 cm, e con spessore variabile da 80 cm alla base a 69 cm in sommità, e con profondità variabile da 125 cm alla base a 14 cm in sommità; è costituito da muratura in mattoni pieni, alla quale si assegna il peso specifico di 18.00 kN/m^3 : tale peso deve essere incrementato dal carico di superficie prodotto dalle lastre di piombo. Per stimare il peso complessivo, si considerano lastre di 2.5 mm di spessore con peso specifico del piombo pari a 113.40 kN/m^3 . Ai fini della modellazione, si può considerare un peso specifico 'equivalente' pari a:

$$(18.00 \times 0.69) + (113.40 \times 0.0025) / (0.69 + 0.0025) = 18.34 \text{ kN/m}^3.$$

Calcolo del peso della lanterna, a sezione ottagonale:

area dell'ottagono (in m^2): $2\sqrt{2} \cdot R^2 = 2.83 R^2$; per l'ottagono esterno: $2.83 \cdot (1.83/2)^2=2.37 \text{ m}^2$; per l'interno: $2.83 \cdot (1.33/2)^2=1.25 \text{ m}^2$. L'area della sezione muraria della lanterna risulta pari a: $2.37-1.25=1.12 \text{ m}^2$.

Peso della lanterna: $1.12 \cdot 4.79 \cdot 18.00=96.6 \text{ kN}$ cui si aggiunge un carico di 2.00 kN/m^2 sulla copertura, e pertanto: $96.6 + 2.00 \cdot 2.83 = 102.26 \text{ kN}$, peso che suddiviso nei 20 spicchi fornisce un carico verticale pari a

5.11 kN: tale è il carico che insisterà sull'anello in chiave costituito dai conci di sommità dei 20 archi ideali affiancati, rappresentativi dello schema di calcolo della cupola.

2.1. Modellazione della cupola

La modellazione dello spicchio di cupola in Aedes.SAV inizia con la scelta di un arco ellittico, e le seguenti specifiche (fig. 13):

- profondità della volta 125
- semiasse verticale 553, asse orizzontale 799, spessore d'imposta 80, spessore in chiave 69
- numero di conci 80 (40 per ognuno dei due semiarchi, con interfaccia in chiave)

(NB: se la cupola fosse emisferica o comunque a profilo circolare, si inizierebbe da un arco circolare).

Fase 1: definizione dell'arco ellittico con asse orizzontale e semiasse verticale; impostazione profondità all'imposta (costante su tutto l'arco) e spessori all'imposta e in chiave. Scelta del numero di conci (pari).

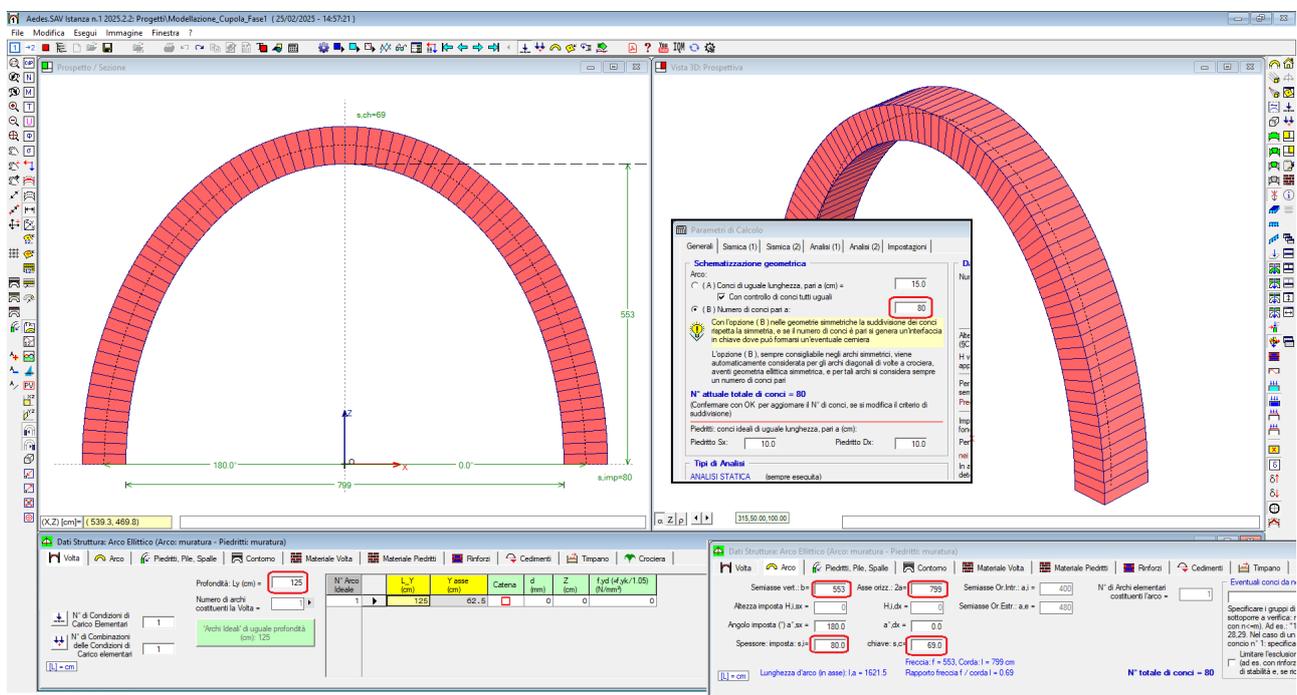


Fig. 13. Modellazione della cupola: fase 1

Sulla geometria dello spicchio nella fase 1 è possibile individuare geometricamente la calotta dove i paralleli (anelli) sono compressi, attraverso l'angolo di colatitudine di 20° (come noto da quanto illustrato nel paragrafo precedente). In fig. 14 sono evidenziati in grigio i 'conci' assenti in sommità a causa dell'apertura, e in rosso chiaro i conci appartenenti alla calotta compressa in direzione circonferenziale.

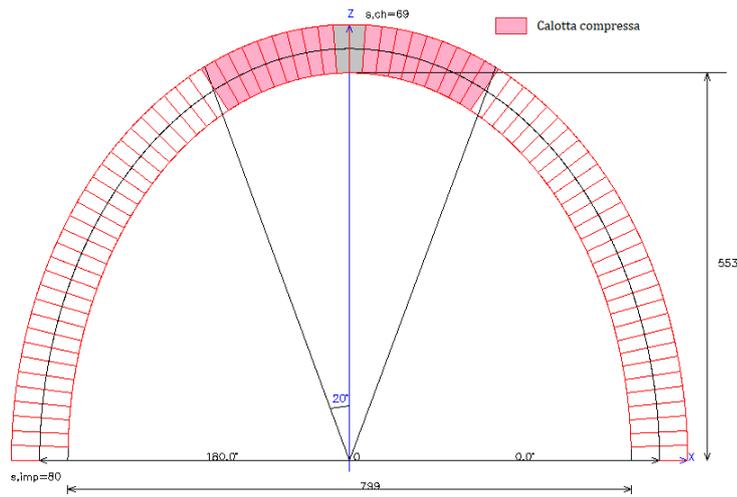


Fig. 14. Individuazione geometrica della calotta superiore compressa

Fase 2: trasformazione in arco per punti e definizione della profondità variabile.

A questo punto l'arco ellittico deve essere trasformato in arco per punti, in modo tale da poter gestire la variazione di profondità dello spicchio di cupola. Allo scopo, viene utilizzato anzitutto il comando 'Trasforma l'arco corrente in arco per punti' del menu Esegui della finestra Dati Progetto (fig. 15).

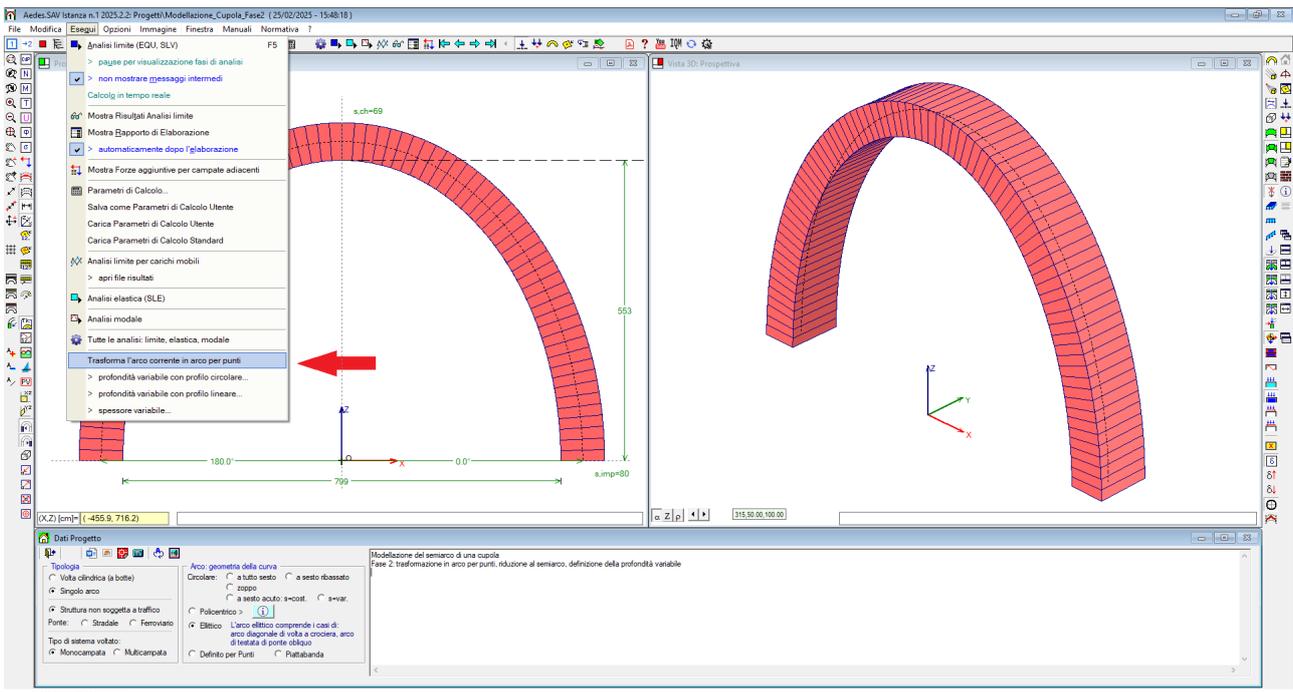


Fig. 15. Comando per la trasformazione dell'arco ellittico in arco per punti

Dopo la trasformazione l'arco appare geometricamente invariato, ma ora è disponibile la gestione della profondità. Per definire la profondità variabile da 125 cm all'imposta fino a 69 cm in chiave, si utilizza il comando 'Profondità variabile con profilo lineare' del menu Esegui della finestra dati Progetto (fig. 16) (profilo lineare in quanto visto in pianta lo spicchio di cupola è di tipo 'triangolare').

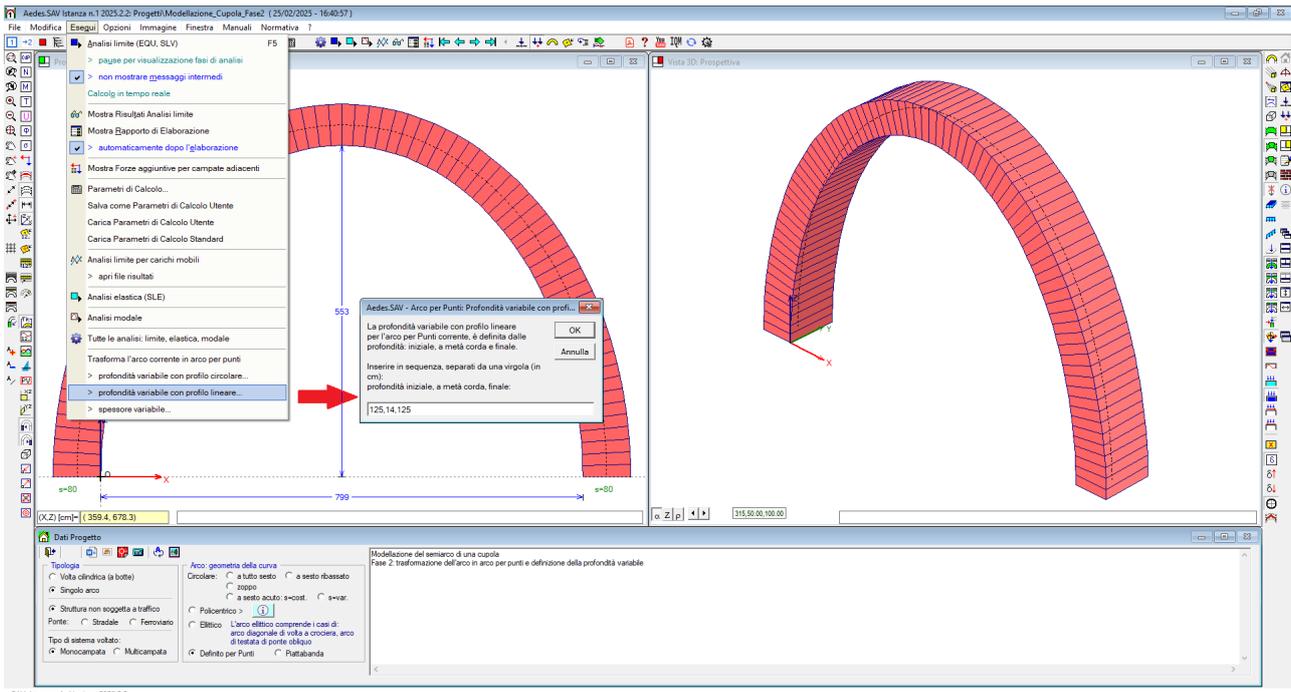


Fig. 16. Definizione della profondità variabile

L'arco si presenta ora come in fig. 17, con variazione della profondità simmetrica da un'imposta a quella opposta.

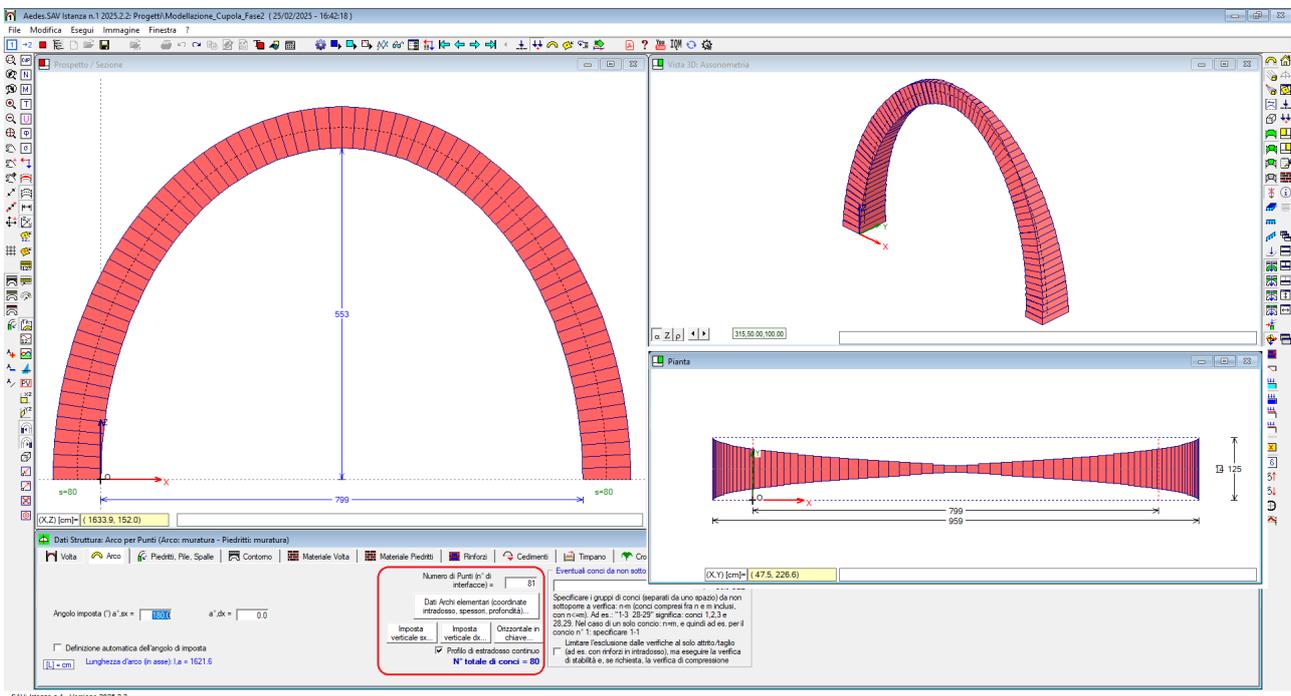


Fig. 17. Arco 'completo' estratto dalla cupola

La cupola verrà studiata attraverso la definizione di un semiarco, infatti l'apertura in sommità non consente la continuità dello spicchio completo: la continuità viene interrotta in chiave. Da osservare comunque che anche in caso di cupola 'chiusa' in sommità, la modellazione fa riferimento al semiarco. Come mostrato in fig. 18, gli 80 conci attuali vengono ricondotti alla metà.

Fase 3: riduzione al semiarco.

Specificando n° di interfacce pari a 41 (40 conci + 1), si ottiene il semiarco riportato in fig. 18.

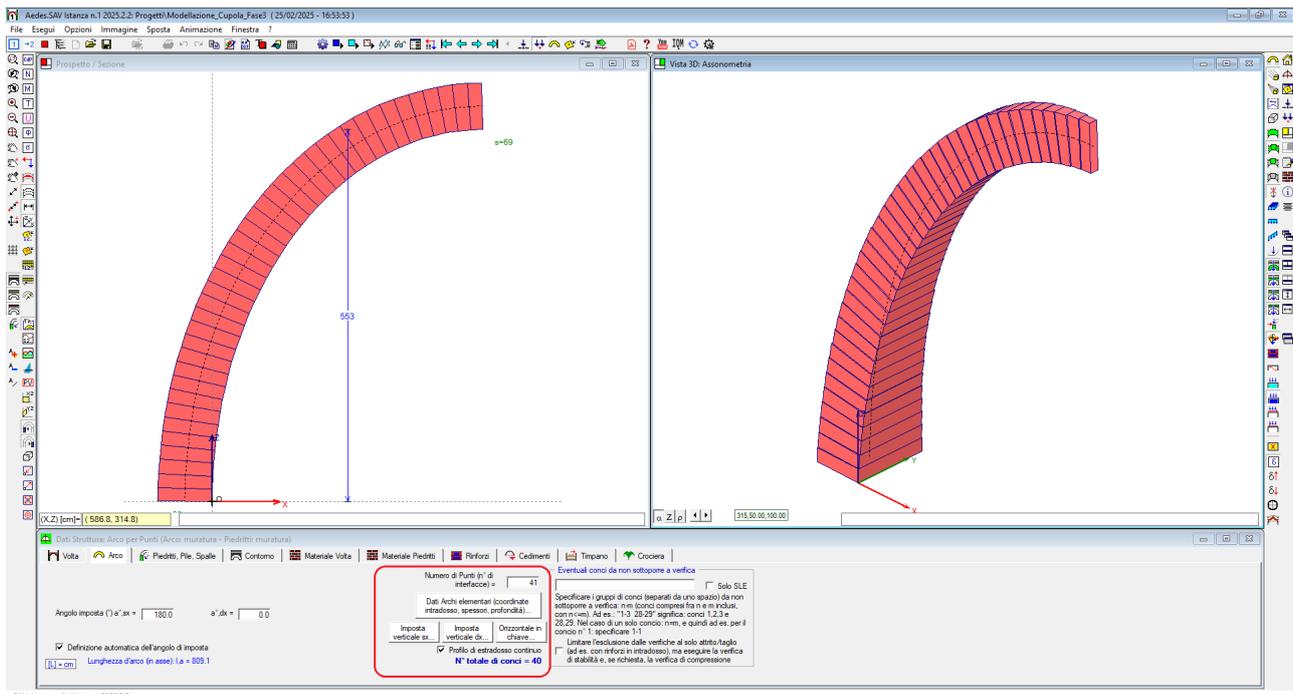


Fig. 18. Riduzione dello spicchio di cupola al semiarco

Poiché nella chiave della cupola è presente il foro di 45 cm di diametro, si elimina l'ultimo concio (di lunghezza circa 20 cm., approssimativamente pari alla metà del diametro), specificando 40 interfacce invece di 41 e ottenendo l'arco di fig. 19, costituito da 39 conci.

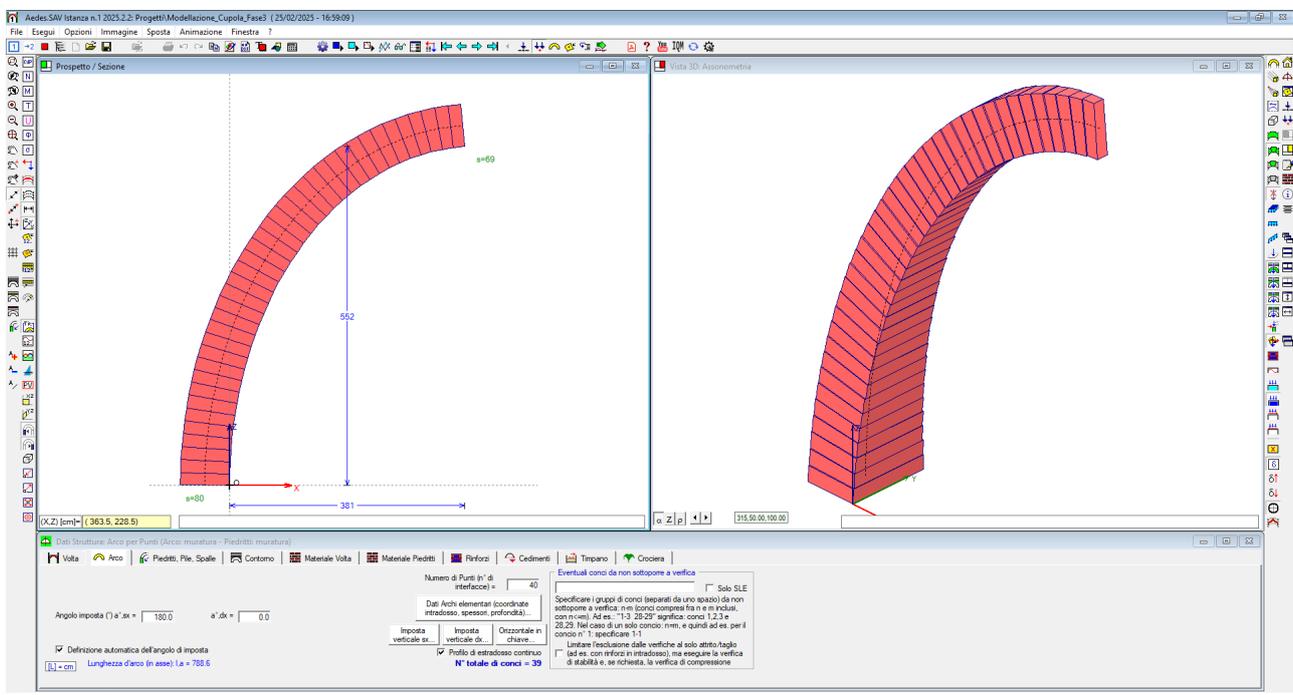


Fig. 19. Semiarco aggiornato per tenere conto del foro della cupola in sommità

Fase 4: completamento dati: materiali, condizioni di carico, analisi e verifiche di sicurezza.

A questo punto lo spicchio è pronto per la definizione dei dati sui materiali e sulle condizioni di carico. La muratura è in mattoni pieni e malta di calce e si considera un livello di conoscenza LC1 (fig. 20).

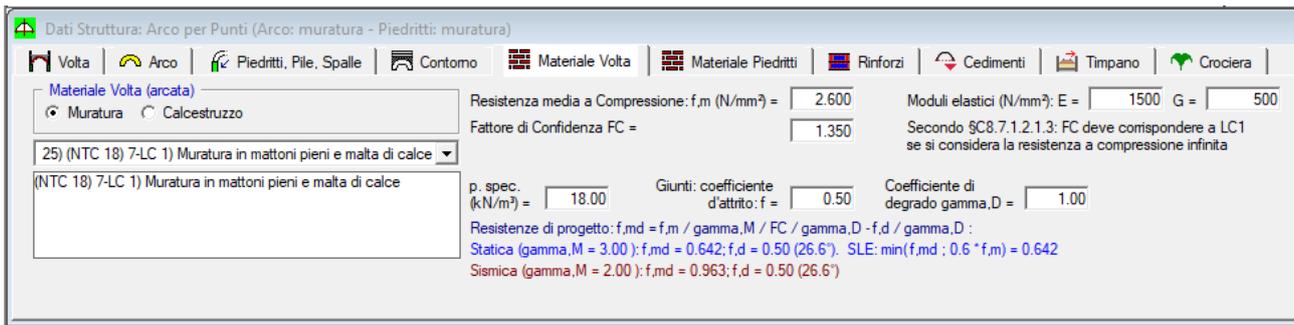


Fig. 20. Muratura in mattoni pieni

Per quanto riguarda i carichi, oltre al peso proprio dell'arco viene considerato il carico concentrato in sommità dovuto alla lanterna. Tale carico viene attribuito a tre conci in sommità (fig. 21), considerando la posizione di imposta della lanterna rispetto alla dimensione del foro in sommità della cupola (vd. fig. 12). Le due condizioni di carico elementari confluiscono nelle combinazioni di condizioni di carico (fig. 21) per le quali verrà eseguita l'analisi statica.

Ai fini della stabilità, il carico permanente viene considerato una volta favorevole e una volta sfavorevole, attribuendogli i corrispondenti coefficienti moltiplicativi 0.9 e 1.1 (cfr. Tab. 2.6.I NTC18) competenti allo stato limite di equilibrio come corpo rigido EQU: l'analisi limite condotta sul modello è infatti un'analisi di tipo rigido-fragile volta a studiare l'equilibrio della struttura e l'eventuale formazione di un cinematismo, ossia di un meccanismo di collasso. Il carico permanente in genere viene considerato favorevole ai fini della verifica di stabilità (normalmente, con carico verticale più elevato l'arco è più stabile), e sfavorevole ai fini della resistenza (arco maggiormente compresso).

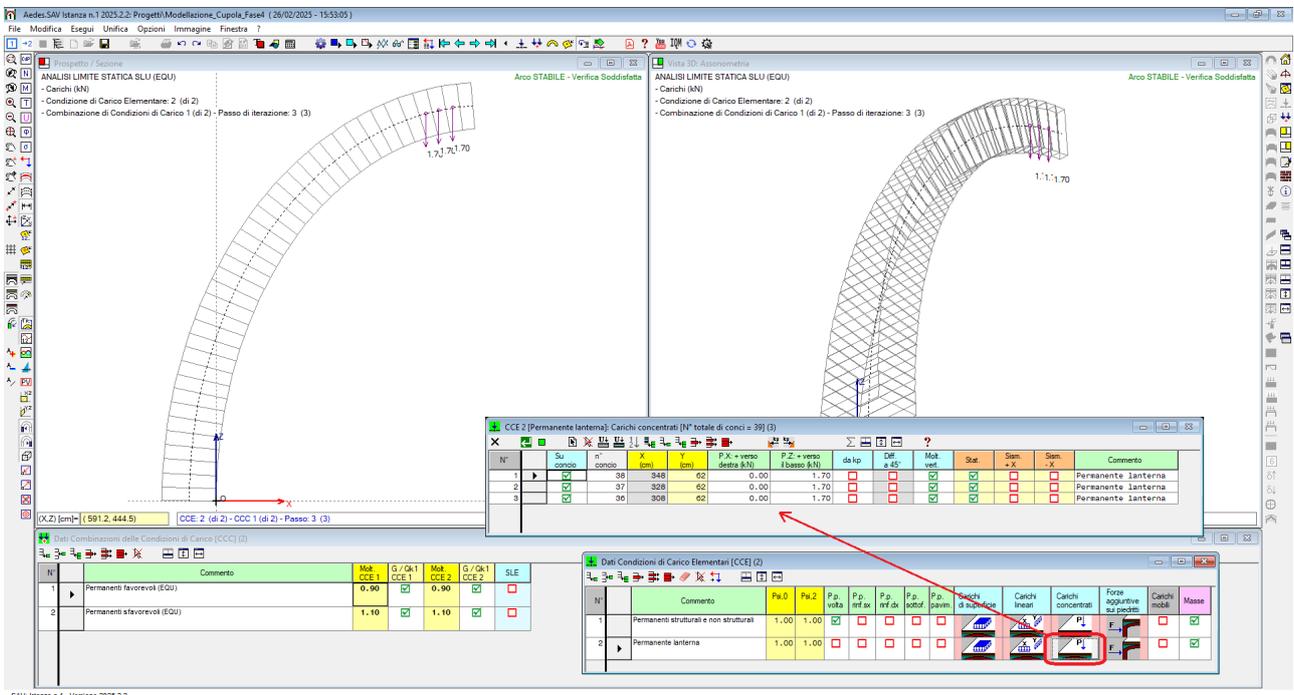


Fig. 21. Condizioni di Carico Elementari, con carichi concentrati dalla lanterna, e Combinazioni di Condizioni di Carico



Fig. 22. Dati Arco. Specifica dei conci esenti da verifica a taglio

In fig. 22 viene riportata la scheda Arco dei dati Struttura, dove è specificato, nel riquadro in colore rosso, il gruppo di conci (intervallo di conci 36-39, che significa 4 conci dal n°36 al n°39) da non sottoporre a verifica a taglio, situati nella zona superiore della calotta compressa in direzione circonferenziale. La verifica a taglio in sommità verrà eseguita a parte considerando il beneficio la compressione circonferenziale degli anelli nella parte superiore della cupola, secondo la formulazione illustrata nel paragrafo 1. del presente documento.

2.2. Analisi statica

L'analisi statica, eseguita con analisi limite, mostra verifica soddisfatta sia per stabilità che per resistenza (taglio, compressione). In fig. 23: la curva delle pressioni per la CCC 2.

All'imposta sul tamburo, lo spicchio esercita una spinta verso l'esterno pari a 10.55 kN riferita alla dimensione in profondità di 125 cm, e quindi radialmente: $10.55/1.25 = 8.44$ kN/m, mentre il carico verticale è pari a 82.77 kN da cui il carico distribuito: $82.77/1.25 = 66.22$ kN/m:

azioni alle imposte (sul tamburo): $N=66.22$ kN/m, Spinta= 8.44 kN/m (12.7% del carico verticale).

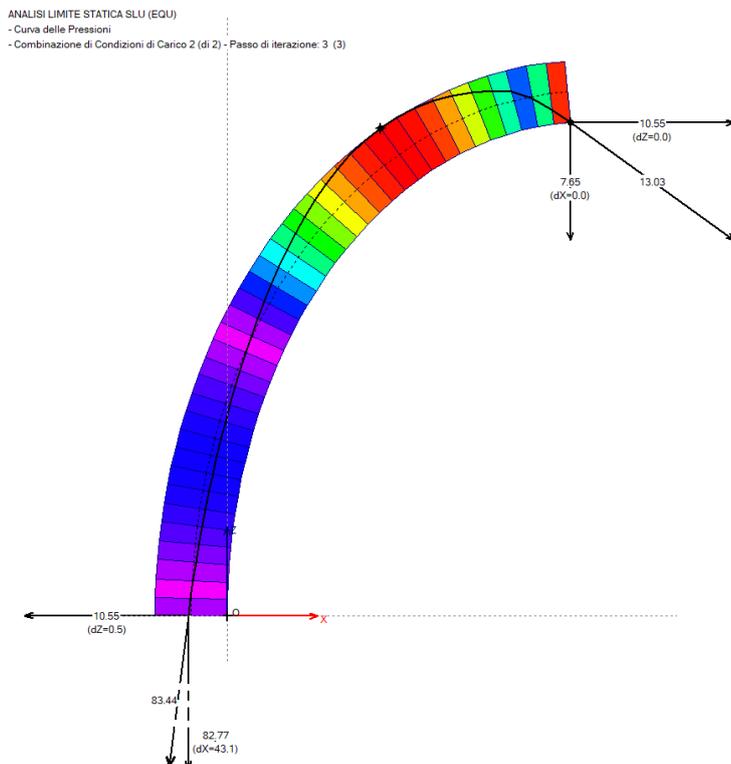


Fig. 23. Risultati dell'analisi statica: curva delle pressioni

In fig. 24 sono riportati il diagramma dello sforzo normale affiancato dalle tensioni di compressione; in fig. 25, il diagramma del taglio affiancato dagli angoli d'attrito.

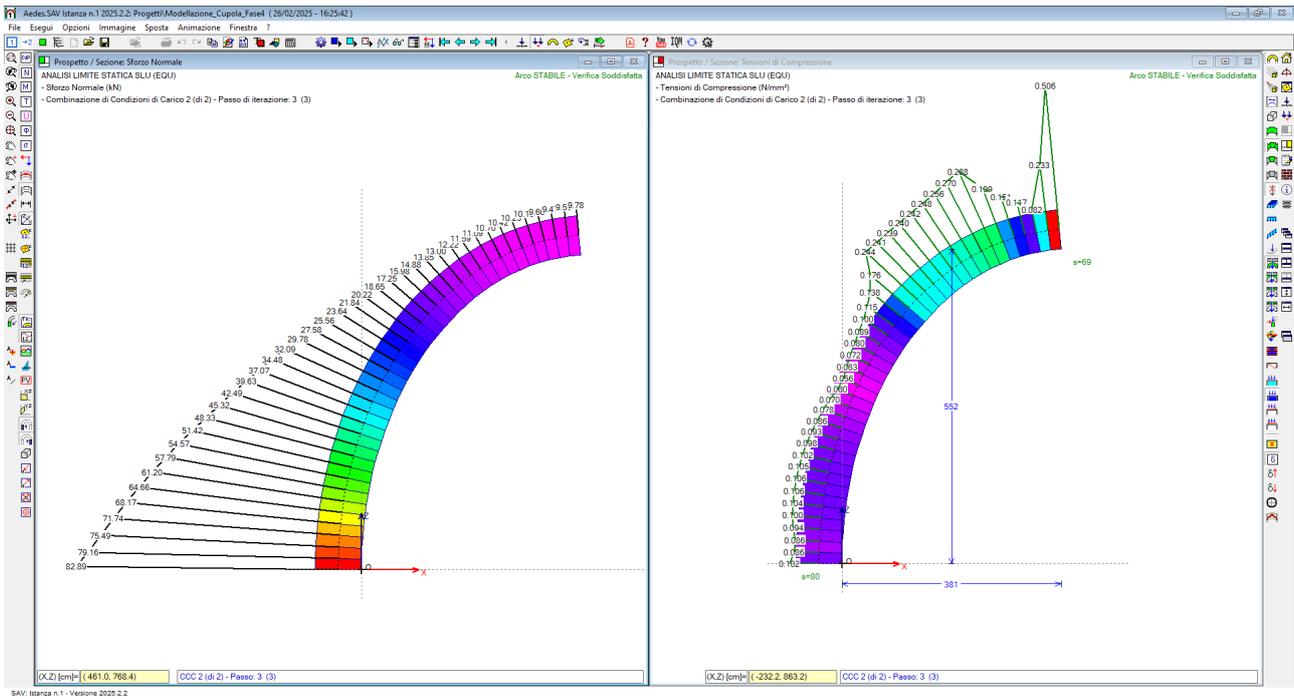


Fig. 24. Risultati dell'analisi statica: sforzo normale e tensioni di compressione

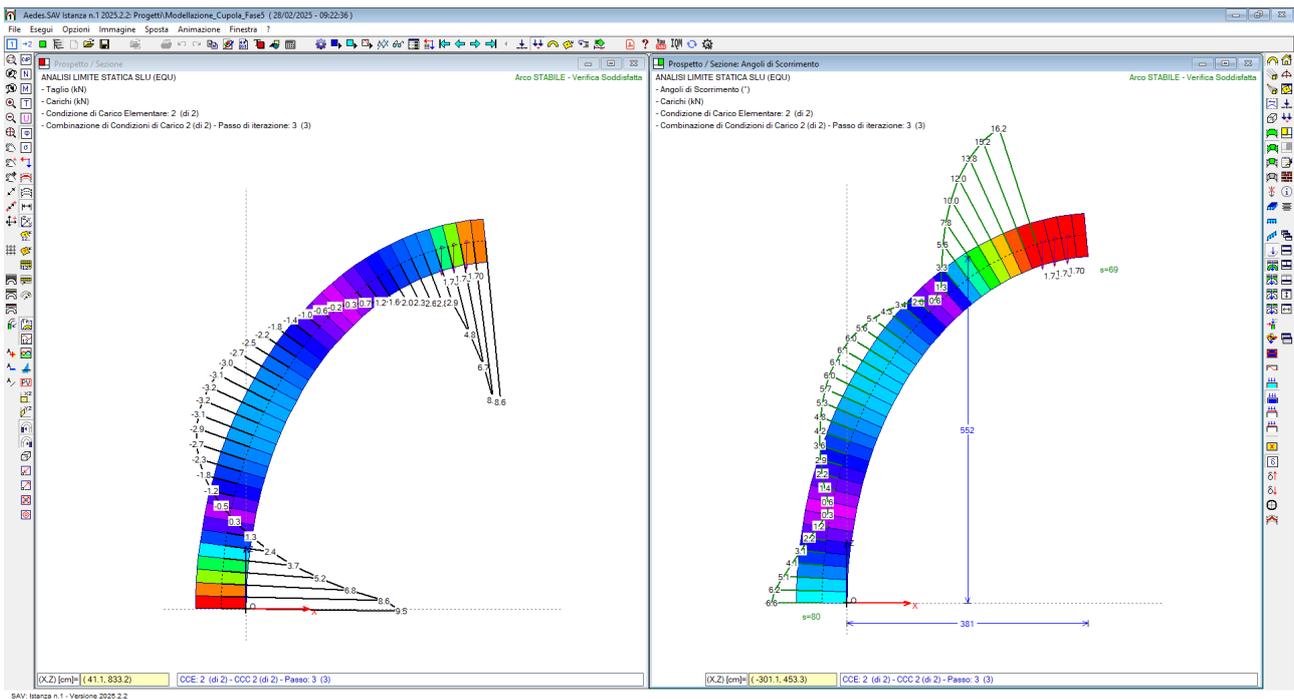


Fig. 25. Risultati dell'analisi statica: taglio e angoli d'attrito

La verifica di sicurezza statica viene completata dai controlli per l'anello di sommità, riguardanti la compressione sull'anello e la verifica a taglio sotto al carico della lanterna.

Lo sforzo normale circonferenziale, come illustrato nel paragrafo 1., è dato da:

$$N_{\theta} = \sigma_c \cdot s \cdot d, \text{ con } \sigma_c = n \cdot H / (2\pi \cdot s \cdot d)$$

Si ha dunque: $\sigma_c = 20 \cdot 10550 / (2\pi \cdot 690 \cdot 690) = 0.070 \text{ N/mm}^2 < f_{md} = 0.642 \text{ N/mm}^2$, con:

$$N_{\theta} = 0.070 \cdot 690 \cdot 690 = 33599 \text{ N}$$

A titolo di confronto, la teoria membranale sull'anello di sviluppo d condurrebbe a:

$N_{\theta} = 0.5 a \cdot w \cdot d$, dove a si assume pari a 553 cm e $w = \rho \cdot s = 18.00 \cdot 0.69 = 12.4 \text{ kN/m}^2$

da cui: $N_{\theta} = 0.5 \cdot 5.53 \cdot 12.4 \cdot 0.69 = 23.66 \text{ kN} = 23660 \text{ N}$

Il valore di N_{θ} calcolato tramite la risoluzione dell'arco con analisi limite risulta maggiore (+42%) in quanto il guscio si allontana dal comportamento membranale, avendo uno spessore in sommità di 69 cm. che, per un 'raggio' (approssimato al semiasse verticale) di 553 cm. è piuttosto elevato: $s/R = 69/553 = 0.125$ (da confrontarsi, a titolo di riferimento, con il valore 0.042 individuato come spessore minimo di una cupola emisferica [1], corrispondente nel caso in esame a $0.042 \cdot 553 = 23 \text{ cm}$).

Per la verifica a taglio sotto il peso della lanterna, il taglio resistente sul giunto fra due conci lungo l'anello è pari a: $T = 0.5 \cdot 0.070 \cdot 690 \cdot 690 = 16663 \text{ N} = 16.66 \text{ kN}$.

A questo taglio deve essere sommato il contributo del taglio resistente della penultima interfaccia dello spicchio in sommità, dove lo sforzo normale è pari a 9.55 kN, per cui: $T_{res} = 0.5 \cdot 9.55 = 4.78 \text{ kN}$.

Assumendo come 'taglio' di calcolo il valore della reazione verticale in sommità pari a 7.65 kN su 14 cm (fig. 22), lunghezza nella quale si può considerare la resistenza a taglio di un'interfaccia in direzione circonferenziale, si ottiene un coefficiente di sicurezza pari a: $(16.90 + 4.78) / 7.65 = 2.83 > 1.00$.

2.3. Analisi sismica

Analogamente alla statica, l'analisi sismica dello spicchio di cupola viene eseguita studiando stabilità e resistenza tramite l'analisi limite. Dopo aver impostato i parametri sismici relativi alla zona di ubicazione, alla classe d'uso (III), alle dimensioni geometriche in elevazione e aver considerato come obiettivo un indicatore di rischio sismico $\zeta_E=0.800$, l'esecuzione dell'analisi conduce al report dei risultati riportato in fig. 26.

Arco 1 (di 1)

ANALISI STATICA
Verifica soddisfatta

CCC 1 (di 2): Verifica soddisfatta

Moltiplicatore verticale di collasso
minimo fra tutti gli Archi ideali e tutte le CCC: **n.d.**

Struttura: Arco n°: CCC n°:

Tipo di Verifica	Arco	Pied. Sx	Pied. Dx
Stabilità (Equilibrio della struttura)	✓		
Taglio / Attrito (nei giunti)	✓		
Compressione	✓		
Trazione dei rinforzi			

ANALISI SISMICA
Info

Moltiplicatore orizzontale di collasso
In direzione longitudinale X
minimo fra tutti gli Archi ideali e i due versi: **0.079**

Struttura: Arco Arco n°: 1 Verso: -X

Moltiplicatori di collasso	Arco	Pied. Sx	Pied. Dx
Tipo di Verifica	+ X - X	+ X - X	+ X - X
Stabilità (Equilibrio della struttura)	>> 1 0.344		
Taglio / Attrito (nei giunti)	1.854 0.079		
Compressione	1.172 0.344		
Trazione dei rinforzi			

Verifica per SLV
domanda:
PGA,DLV = 0.239 g
TR,DLV = 712 anni

Verifica **NON Soddisfatta** ζ_E Indicatori di Rischio Sismico

	PGA,CLV (g)	TR,CLV (anni)	PGA,CLV / PGA,DLV	TR,CLV / TR,DLV
Arco	0.118	126	target = 0.800 0.494	0.177
Piedritti				
Minimo	0.118	126	0.494	0.177

OK

Fig. 26. Report dei risultati di elaborazione, con analisi sismica

L'indicatore di rischio sismico risulta pari a 0.494, quindi inferiore al valore obiettivo 0.800.

Esaminando i risultati, si osserva che la verifica più sfavorevole riguarda l'azione sismica in direzione -X (dall'interno verso l'esterno dell'arco) ed il taglio, con un risultato nettamente inferiore rispetto a quelli della stabilità e della compressione¹.

¹ Per la verifica a compressione si deve tenere presente, come per tutte le verifiche di resistenza, che il risultato non è mai superiore a quello per stabilità, in quanto le verifiche di resistenza non possono essere mai eseguite in configurazioni instabili, per le quali il campo di sollecitazioni non è realistico).

La fig. 27 mostra i risultati della verifica a taglio (attrito) per il sisma -X: lo scarso risultato dipende da un'interfaccia in sommità che non è stata esclusa dalle verifiche a taglio. Si osservi che in tale configurazione, corrispondente al moltiplicatore 0.129 valutato secondo Normativa², l'arco è stabile. Il fatto che il risultato, pur insufficiente per la sicurezza, non dipenda dalla stabilità è molto importante: in generale, le configurazioni peggiori sono infatti quelle instabili, in quanto connesse alla forma dell'arco³.

² Per il caso in esame, il moltiplicatore corrispondente alla domanda è dato da:

$$\alpha_0 = \frac{(a_g/g) \cdot S}{q} \cdot e^* \cdot F_C$$

dove a_g e S sono i parametri di spettro specificati in input per SLV ($PGA=a_g \cdot S$), e^* = frazione di massa partecipante, F_C = fattore di confidenza, q = fattore di comportamento specificato in input. Per il caso in esame: $a_g/g = 0.199$, $S = 1.200$, $q = 2.0$, $e^* = 1$, $F_C = 1.35$, da cui: $\alpha_0 = 0.161$, corrispondente ad una domanda sismica non ridotta. La verifica sismica è soddisfatta se la capacità in termini di PGA è ≥ 0.161 , in corrispondenza di $\zeta_E \geq 1.000$. Adottando l'obiettivo $\zeta_E = 0.800$, il moltiplicatore di collasso di riferimento diviene $\alpha_0 = 0.161 \cdot 0.800 = 0.129$.

³ Ovviamente, anche le configurazioni instabili possono essere oggetto di intervento, impedendo la formazione di cerniere attraverso il posizionamento di materiali resistenti a trazione (cfr. fig. 11).

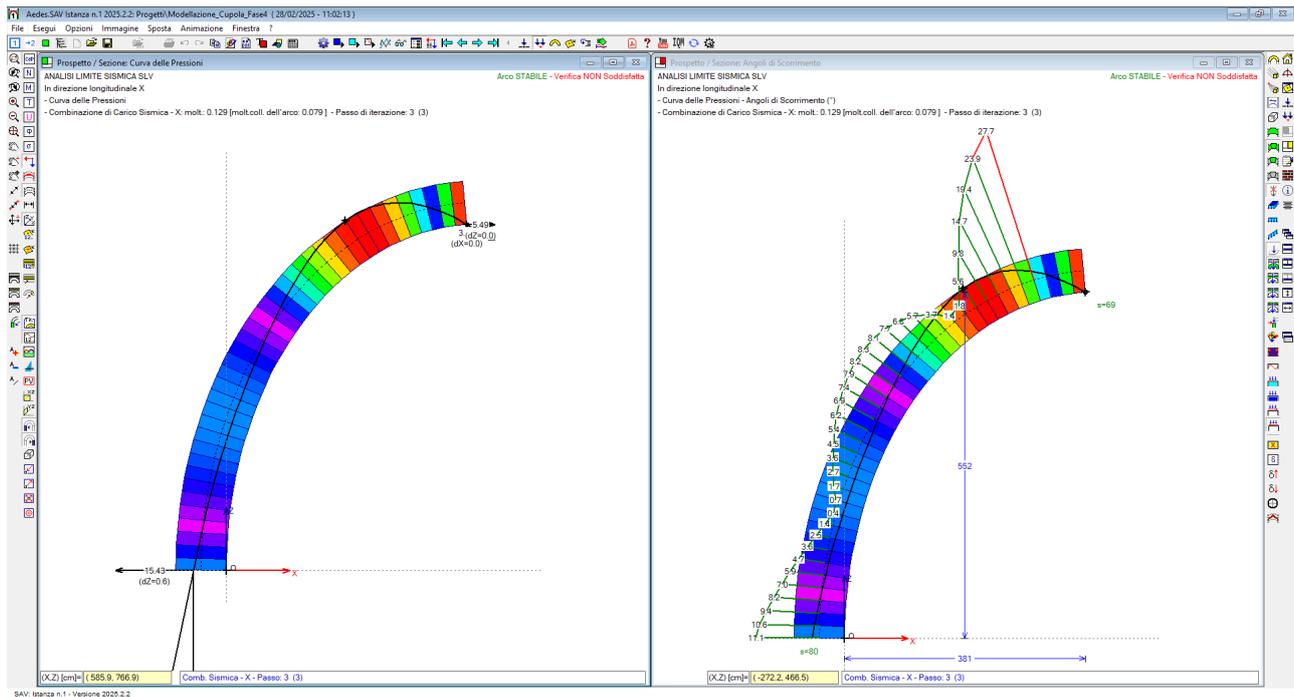


Fig. 27. Curva delle pressioni e verifica a taglio (attrito) per sisma -X

Poiché nella zona superiore della cupola la calotta compressa che rende la struttura ben resistente al taglio comprende anche altri conci che precedono il gruppo degli ultimi 4 (dal n°36 al n°39, come già specificato nei dati), si esegue una nuova analisi inserendo in tale gruppo anche il concio n°35 (fig. 28). I risultati migliorano decisamente, e la verifica a taglio risulta pienamente soddisfatta per sisma +X e -X.



Fig. 28. Ridefinizione della zona in sommità non sottoposta a verifica a taglio

Nel report in fig. 29 i moltiplicatori di collasso mostrano come l'effetto del sisma sopravvento (sisma + X) risulti nettamente più favorevole rispetto al sottovento (sisma -X): prefissata una direzione sismica, la zona della cupola più vulnerabile è quella sottovento, con forze dirette dall'interno verso l'esterno. Durante l'evento sismico direzione e intensità cambiano continuamente e quindi, più o meno, tutte le zone della cupola sono soggette ad analoga vulnerabilità. La forma simmetrica della cupola offre una capacità

equivalente in tutte le direzioni di sollecitazione e gli eventuali danneggiamenti si manifesteranno in una certa parte invece che in un'altra semplicemente in dipendenza dalle zone che per prime iniziano a fessurarsi per effetti sismici, fino alla formazione di meccanismi di collasso, che nella realtà riguarderanno alcuni spicchi piuttosto che altri.

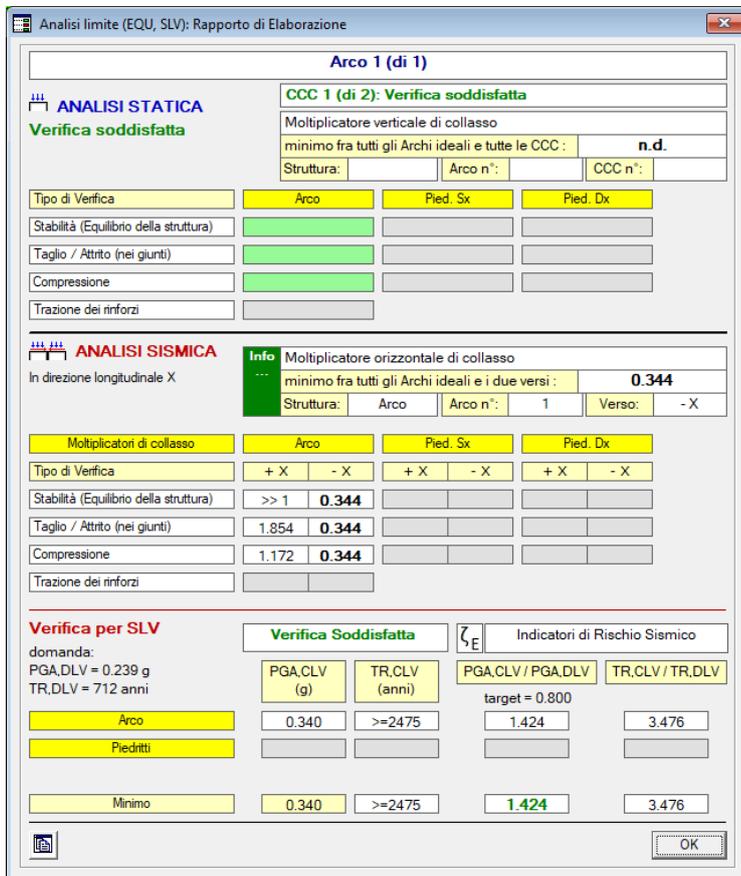


Fig. 29. Risultati definitivi dell'analisi statica e sismica

In fig. 30 si confrontano i risultati per la curva delle pressioni e il diagramma dello sforzo normale per sisma +X e -X. Con sisma +X la spinta in sommità aumenta rispetto alla spinta statica, e con -X diminuisce; all'imposta accade ovviamente il contrario.

Si deve tenere presente che mentre in analisi statica tutte le spinte dei semiarchi in sommità sono uguali (sotto l'ipotesi di carichi gravitazionali assialsimmetrici) e concorrono alla compressione degli anelli di sommità, in analisi sismica la spinta in sommità aumenta per lo spicchio in posizione sopravvento investito da una direzione sismica parallela al suo piano medio, poi diminuisce progressivamente spostandosi radialmente agli spicchi adiacenti, fino alla massima diminuzione per lo spicchio opposto, che resta pienamente sottovento: pertanto, nella calotta in sommità non vi è una compressione uniforme. Si può quindi osservare che anche se la pressione sull'anello di sommità aumenta rispetto al valore statico (in corrispondenza dello spicchio sopravvento), la tensione si ridistribuisce spazialmente nelle zone dell'anello che raccolgono gli spicchi adiacenti fino a quelli opposti, con uno stato tensionale descritto da un andamento spaziale non propriamente riconducibile allo schema piano dello spicchio⁴.

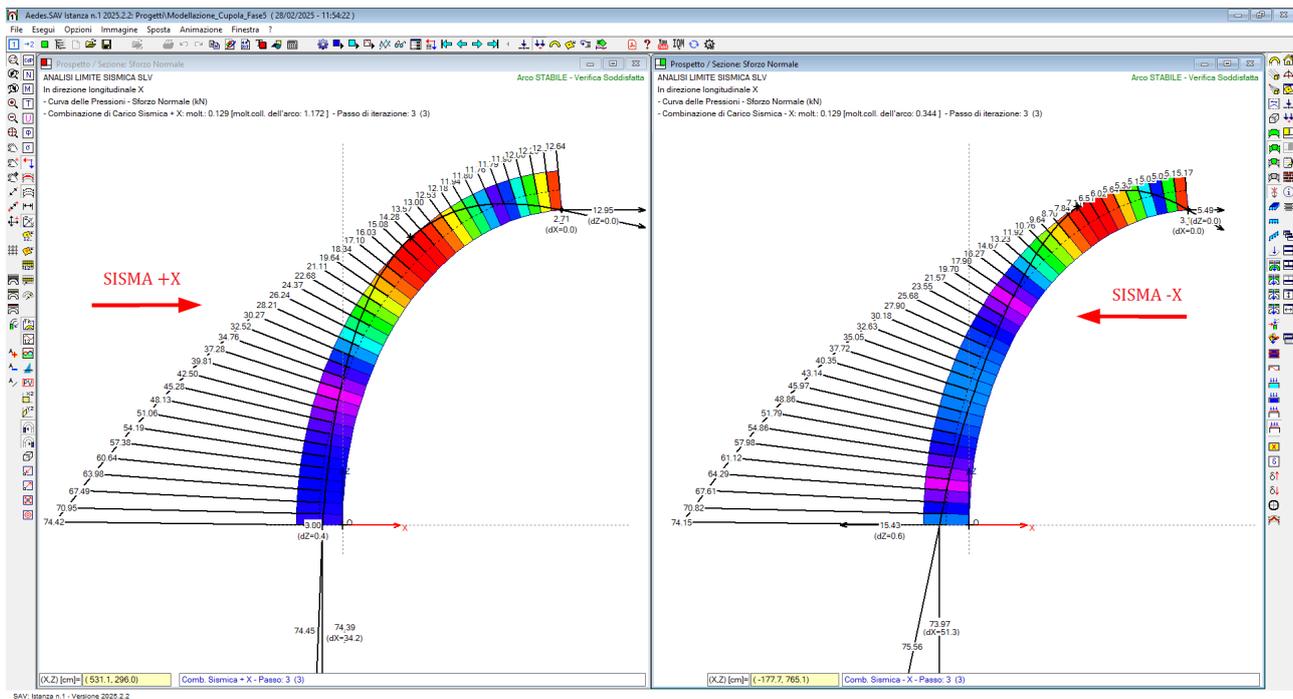


Fig. 30. Curva delle pressioni e Diagramma sforzo normale per sisma +X (a sx) e -X (a dx)

⁴ Le tensioni di compressione nell'anello superiore in direzione circonferenziale sono quindi localmente in aumento in condizioni sismiche rispetto a quelle statiche: tuttavia, la tensione di compressione massima in analisi statica è ampiamente inferiore ai limiti di resistenza. Nel par. 2.2 è risultato: $\sigma_c = 0.070 \text{ N/mm}^2 \ll f_{md} = 0.642 \text{ N/mm}^2$, pertanto vi sono ampie riserve per incrementi tensionali dovuti agli effetti sismici.

Le forze sismiche costituiscono un carico non più assialsimmetrico, tuttavia esse inducono nello spicchio variazioni che non invertono il segno delle spinte alle imposte: questa considerazione è importante per convalidare l'ipotesi di analisi riferita allo spicchio, cioè sul singolo semiarco, anche in condizioni sismiche.

CONCLUSIONI

Nel presente lavoro, è stata illustrata l'applicazione del software professionale Aedes.SAV, dedicato all'analisi delle strutture murarie voltate, allo studio del comportamento statico e sismico di una cupola in muratura.

La struttura della cupola sottoposta al peso proprio è caratterizzata da una calotta superiore compressa in entrambe le direzioni meridiana e parallela, e da una parte inferiore dove la presenza di trazioni, superando la debole resistenza a trazione della muratura, induce fessurazioni lungo i meridiani che si manifestano a partire dalla base della cupola. La cupola, fessurandosi, si suddivide in tanti spicchi che si comportano come archi indipendenti.

Lo studio del comportamento statico della cupola può quindi essere ricondotto all'analisi del singolo spicchio, e, seguendo la teoria di Heyman, la cupola risulta stabile se è possibile definire una curva delle pressioni interna allo spessore dello spicchio.

La risoluzione statica e sismica del semiarco corrispondente allo spicchio viene eseguita mediante analisi limite su modello rigido-fragile, utilizzando il software professionale Aedes.SAV: le verifiche di stabilità e di resistenza vengono eseguite sotto carichi statici e sotto azioni inerziali di origine sismica.

Le azioni alle imposte ottenute dal calcolo possono essere utilizzate sia in sommità, per verificare la resistenza della calotta superiore compressa, sia alla base, per quantificare carichi verticali e spinte agenti sulle strutture di sostegno (tamburo, muri e pilastri) al fine di una loro verifica di stabilità, fondamentale per accertare la sicurezza del complesso monumentale cui la cupola appartiene.

BIBLIOGRAFIA DI RIFERIMENTO

- [1] Heyman J.: *The stone skeleton: structural engineering of masonry architecture*, Cambridge University Press, 1997.
- [2] Como M.: *Statica delle costruzioni storiche in muratura*, Aracne, Roma, 2011.
- [3] Paradiso M., Tempesta G.: *Archi, volte e cupole: analisi e calcolo*, in: *Archi e volte in zona sismica. Meccanica delle strutture voltate*, a cura di Borri A., Bussi L., Doppiavoce, Napoli, 2011.
- [4] Bayraktar A, Bayraktar S, Hökelekli E.: *Strengthening techniques for masonry domes: A review*, International Journal of Space Structures. 2023;38(1):30-39.
- [5] Aedes.SAV, Aedes Software, versione 2025.2.2, www.aedes.it