

L'armatura di piastre e gusci in calcestruzzo

Il modello "sandwich" dell'Eurocodice 2 per il progetto e la verifica di elementi bidimensionali soggetti a pressoflessione

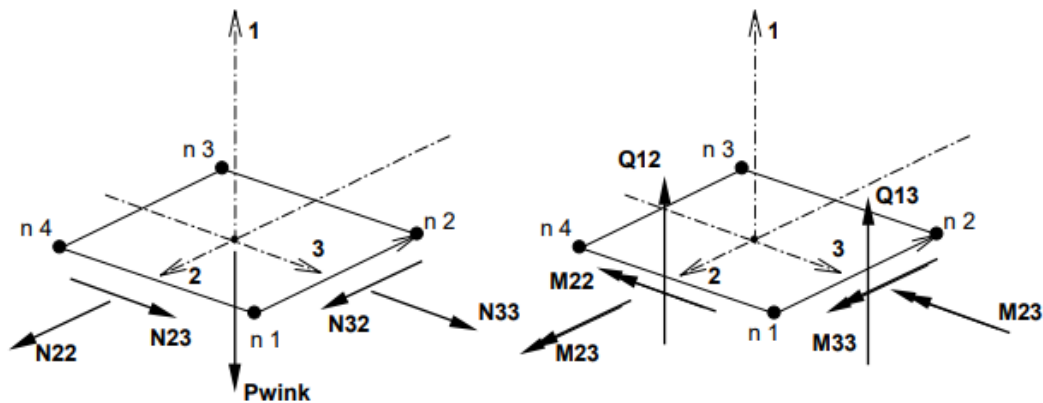
Le piastre e i gusci nelle strutture civili sono elementi che sono largamente impiegati. Nella normativa italiana non sono descritti metodi di calcolo specifici; la prima fonte alternativa a cui attingere sono gli Eurocodici, dove viene indicato il metodo "sandwich", denominato così perché l'elemento armato viene suddiviso in tre strati: due esterni che lavorano a membrana nel proprio piano e uno interno a cui è affidato il compito di trasmettere gli sforzi tra le due membrane esterne, oltre agli sforzi di taglio fuori piano.

Si tratta di un modello idoneo a valutare il comportamento di elementi bidimensionali pressoinflessi con uno strato di armatura inferiore e uno superiore, con barre disposte secondo due direzioni ortogonali tra di loro. Si tratta del caso più frequente nella pratica progettuale. Esistono metodi che coprono anche casi più complessi, ma esulano dall'intento di questo testo.

Richiameremo le ipotesi fondamentali alla base del calcolo, sviluppando alcune equazioni che possono chiarire i passaggi che portano alle formule di normativa e che presentano alcune semplificazioni sul comportamento dei materiali e sui metodi di progetto e verifica delle armature.

Gli Eurocodici 2 del 2006 riportano procedure abbastanza dettagliate, a differenza dell'ultima revisione appena pubblicata che richiama sinteticamente i concetti fondamentali, ma sostanzialmente si tratta della stessa procedura. Utili indicazioni si trovano anche nel CEB-FIP "Model Code 2010"

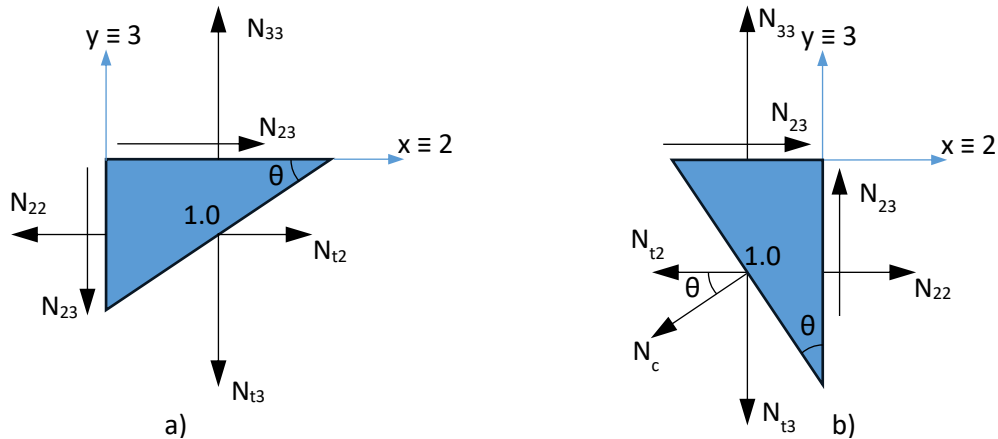
Di seguito si utilizzeranno le seguenti convenzioni sui segni delle azioni interne:



Le ipotesi di base per le membrane armate e le equazioni di equilibrio

Le formule riportate dall'Eurocodice per la verifica delle membrane si basano sulle seguenti ipotesi:

- fessura del calcestruzzo completamente "liscia"
- armature che agiscono esclusivamente con sforzi di trazione paralleli al proprio orientamento.



Con riferimento allo schema indicato in figura, si indica con θ l'angolo della fessura rispetto all'asse x , positivo se antiorario, che può essere fissato arbitrariamente, nei limiti che vedremo. Se la fessura è liscia, lo sforzo del calcestruzzo può essere solo di compressione (N_c negativo) e parallelo alla direzione della fessura stessa. Le frecce indicano la direzione positiva degli sforzi.

Tralasciando i casi di trazione monoassiale parallela a uno degli assi, con $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$, si possono quindi scrivere le equazioni di equilibrio considerando sia il caso a), con soli sforzi delle armature (sezione inclinata parallela alla fessura), sia il caso b) con lo sforzo di compressione ortogonale ad essa.

Equilibrio alla traslazione sull'asse 2 e 3 schema a):

$$N_{t2} \sin \theta = N_{22} \sin \theta - N_{23} \cos \theta \Rightarrow N_{t2} = N_{22} - N_{23} \cotg \theta \quad (1)$$

$$N_{t3} \cos \theta = N_{33} \cos \theta - N_{23} \sin \theta \Rightarrow N_{t3} = N_{33} - N_{23} \tg \theta \quad (2)$$

Una volta determinati N_{t2} e N_{t3} , si può scrivere l'equilibrio sullo schema b):

$$N_c \cos \theta = N_{22} \cos \theta + N_{23} \sin \theta - N_{t2} \cos \theta \quad (3a)$$

$$N_c \sin \theta = N_{33} \sin \theta + N_{23} \cos \theta - N_{t3} \sin \theta \quad (3b)$$

Sostituendo N_{t2} o N_{t3} in una delle due equazioni precedenti:

$$N_c = N_{23} / (\sin \theta \cos \theta) = N_{23} (\tg \theta + \cotg \theta) \quad (4)$$

L'angolo θ dovrà essere scelto in modo da soddisfare le ipotesi di base; quindi, a seconda del sistema di sforzi dato $\{N_{22}, N_{33}, N_{23}\}$, occorre fare in modo che si abbia $N_{t2} \geq 0$ e $N_{t3} \geq 0$, $N_c \leq 0$.

L'armatura ottimale si ottiene minimizzando la somma $N_{t2} + N_{t3}$ che corrisponde a trovare il minimo di $-N_{23} (\tg \theta + \cotg \theta)$, che a sua volta deve essere un valore positivo, per rispettare la condizione $N_c \leq 0$.

Questo equivale al caso di $\theta = \pm 45^\circ$, quindi $|\cotg \theta + \tg \theta| = 2$ con segno opposto a N_{23} , ovvero $N_{23} \cotg \theta = N_{23} \tg \theta = -|N_{23}|$.

Le (1) e (2) e (4) in queste condizioni diventano $N_{t2} = N_{22} + |N_{23}|$; $N_{t3} = N_{33} + |N_{23}|$; $N_c = -2|N_{23}|$. Se una delle prime due fornisce valori negativi, si contraddicono le ipotesi iniziali e si deve correggere il valore dell'angolo del puntone compresso θ , ponendo una delle seguenti condizioni e ricordando che $N_{23} \cotg \theta < 0$ e $N_{23} \tg \theta < 0$:

$$\cotg \theta = -N_{22} / |N_{23}|$$

$$\tg \theta = -N_{33} / |N_{23}|$$

Nel caso entrambi gli sforzi sull'armatura fossero negativi, l'armatura non è necessaria e la resistenza è affidata completamente al calcestruzzo.

Nel caso in cui la piastra sia soggetta a soli sforzi di flessione, ovvero con valori di N_{22} , N_{33} e N_{23} nulli, si possono applicare ragionamenti simili a quelli sopra esposti ai valori dei momenti M_{22} , M_{33} e M_{23} che costituiscono la base del metodo di Wood-Armer per piastre semplicemente inflesse.

La verifica della membrana

Con alcuni altri semplici passaggi si possono ottenere le altre formule riportate negli Eurocodici che determinano le trazioni affidate all'armatura e le compressioni che competono al calcestruzzo ed è abbastanza semplice passare alla verifica dei materiali, controllando per le armature che l'area unitaria disposta in ogni direzione, moltiplicata per l'opportuna resistenza, a seconda dello stato limite ultimo che si deve verificare, sia superiore o uguale alla trazione unitaria agente.

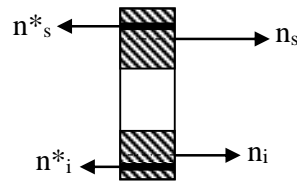
Per quanto riguarda il calcestruzzo, la compressione calcolata deve essere confrontata con un valore ridotto per tenere conto dello stato fessurato del materiale, nel caso che ci sia trazione sulle armature in direzione trasversale. Nel caso, dall'analisi dei cerchi di Mohr, risulti che la tensione principale massima sia comunque negativa, ovvero di compressione, si deve verificare che la corrispondente tensione principale minima in compressione sia in valore assoluto non superiore alla tensione di progetto del calcestruzzo. Nei precedenti Eurocodici in alcuni casi veniva consentito di utilizzare il beneficio alla resistenza del calcestruzzo dato dalla compressione biassiale, ma ad una prima lettura questa possibilità sembra essere stata rimossa nell'edizione del 2024.

Il modello sandwich e l'algoritmo di verifica

Per l'analisi dei casi di piastre e gusci soggetti a pressoflessione, gli Eurocodici propongono un modello di comportamento, anche questo soggetto a numerose semplificazioni, che tuttavia consente di ottenere una soluzione nel caso di presenza di tutte le azioni interne di elementi bidimensionali. Questa caratteristica, unita a una certa laboriosità dei calcoli, lo rende idoneo per un'implementazione in codici di calcolo automatico.

Si ipotizza innanzi tutto la presenza di due strati di armatura ai lati inferiore e superiore. L'elemento piastra viene suddiviso in tre strati. Quello inferiore e quello superiore lavorano come membrane a cui vengono affidati gli sforzi di pressoflessione nel piano; in prima approssimazione il piano medio di questi due strati è posizionato in corrispondenza del baricentro della rispettiva armatura. Lo strato centrale ha il compito di trasmettere gli sforzi di taglio fuori piano Q_{12} e Q_{13} e di collegare i due strati esterni. I momenti M_{22} , M_{33} e M_{23} vengono trasformati in azioni di membrana attraverso l'introduzione di bracci di coppia, fissati in prima approssimazione come la distanza tra i piani medi degli strati esterni, mentre le azioni complessive di membrana N_{22} , N_{33} , N_{23} vengono ripartite su di loro in parti uguali.

Si ottengono così due membrane che possono essere progettate e verificate come tali, secondo quanto scritto in precedenza. In caso di eccessiva compressione del calcestruzzo su uno o entrambi gli strati, è possibile aumentarne lo spessore fino a soddisfare le verifiche o fino a quando la geometria dell'elemento non consente ulteriori incrementi. Questa operazione modifica i bracci di coppia, quindi è necessario ripetere l'intera operazione dal principio attraverso un processo iterativo. Per effetto dell'incremento di spessore, l'armatura si viene a trovare in una posizione non baricentrica rispetto allo strato esterno, quindi nascono degli sforzi interni aggiuntivi, schematizzati dalla seguente immagine; i valori con * si riferiscono alle trazioni sull'armatura e vengono determinati per equilibrio con i valori n_s e n_i calcolati sul baricentro degli strati.



Le verifiche a taglio fuori piano si svolgono in modo abbastanza semplice, come per le travi, individuando la direzione φ_0 in cui il taglio è massimo attraverso la condizione $tg \varphi_0 = Q_{13}/Q_{12}$; il valore del taglio massimo agente è $Q = \sqrt{Q_{12}^2 + Q_{13}^2}$.

In caso di necessità di armatura trasversale, per effetto della formazione del traliccio con calcestruzzo fessurato, si generano sforzi aggiuntivi di membrana che vanno sommati a quelli generati dalle azioni esterne.

L'implementazione in Namirial CMP Analisi Strutturale

Nel software [CMP Analisi Strutturale](#) sono implementati i suddetti algoritmi. L'armatura viene definita con tabelle di posizioni successive che consentono la distribuzione puntuale di vari tipi di armatura, ciascuna caratterizzata da un passo, un diametro e un copriferro. La procedura di verifica consente inoltre una gestione dettagliata di casi particolari, come differenze tra spessori resistenti degli strati componenti nelle varie direzioni, la possibilità di controllo dei risultati e l'impostazione di parametri che consentono al progettista di adattarsi ai vari casi. La distribuzione delle armature può essere svolta sia per via manuale, ad esempio per riprodurre condizioni esistenti, sia in modo automatico con controllo interattivo dei risultati. Il manuale riporta in dettaglio l'applicazione del metodo descritto e tutti i criteri adottati.

Per piastre piane semplicemente inflesse è anche disponibile un algoritmo di progetto che, applicando il metodo di Wood-Armer, consente di determinare l'area minima di armatura e successivamente di elaborare una distribuzione delle armature completa di tutti i dettagli esecutivi, quali sovrapposizioni, ancoraggi, semplificazione della distribuzione degli spezzoni e modifiche dirette del progettista che è possibile sottoporre nuovamente a verifica.

Il risultato finale può essere rappresentato su tavole esecutive, complete di computo dei materiali.

Pos	Ø (mm)	Passo(cm)	Coprif (c...)	Colore	A Par(cm²/m)	A Tot(cm²/m)
1	12	20	3	Green	5.65487	5.65487
2	14	20	3	Blue	7.6969	13.3518

È inoltre possibile eseguire verifiche al punzonamento, agli stati limite di esercizio, con controllo delle tensioni, delle deformazioni e della fessurazione, in modo da coprire tutte le necessità che il progettista deve affrontare nel calcolo di piastre e gusci in c.a.

Scopri di più su [CMP Analisi Strutturale](#)