

# MasterSap 2021:

## l'analisi modale con il metodo dei vettori di carico di Ritz

I prodotti AMV, in particolari quelli legati al software principale MasterSap, modellatore tridimensionale legato all'analisi agli elementi finiti in campo strutturale, sono in continua evoluzione. Oltre al consueto perfezionamento normativo, che ha impegnato gran parte del biennio 2019-20, con gli aggiornamenti alle Norme Tecniche, alla Circolare Applicativa, ai decreti di classificazione sismica ed alle asseverazioni legate al SismaBonus, ci sono anche novità tecnologiche (da ricordare l'evoluzione recente ai sistemi a 64bit) e altre legate a nuove funzionalità. Il 2020 si è chiuso con il rilascio dell'ultima versione di aggiornamento a MasterSap 2020, i cui numerosi contenuti sono illustrati in [questi filmati](#).

Il 2021 si apre con molta altra carne al fuoco, particolare con l'aggiunta di nuovi strumenti e contenuti che renderanno MasterSap sempre più in linea con le richieste professionali legate alla progettazione strutturale. La verifica sugli edifici esistenti sarà integrata con la gestione degli elementi bidimensionali: solai orizzontali e pareti verticali (nella loro concezione di pareti tozze, estese, oppure snelle, di prevalente sviluppo verticale) potranno essere verificate nell'ambiente di MasterEsist, mentre in ambito BIM vedrà alla luce un plug-in di import/export per la comunicazione con applicativi di modellazione architettonica-strutturale di altre case software.

Per quel che riguarda l'analisi saranno sfruttate le possibilità che dà la progettazione con le regole del comportamento non dissipativo per ottimizzare i dimensionamenti di armature anche nel rispetto della gerarchia delle resistenze, e sarà introdotta una nuova tecnica numerica nel campo dell'analisi modale, che ottimizzerà i tempi di risoluzione delle strutture.

### Sintesi Metodo dei vettori di carico di Ritz per l'analisi modale

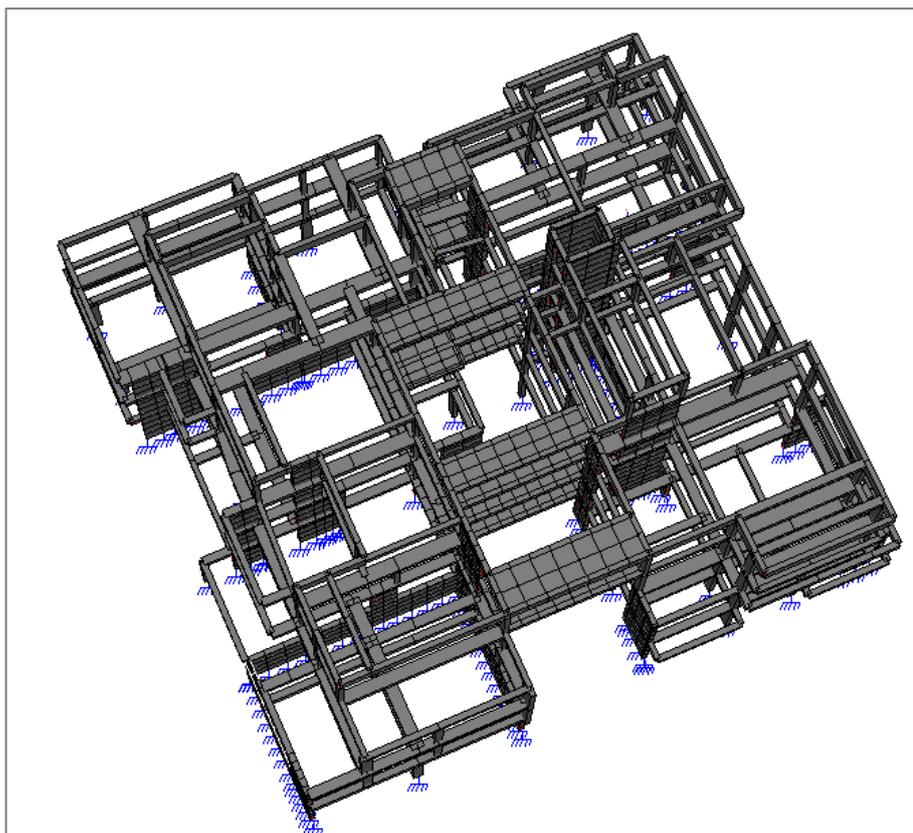
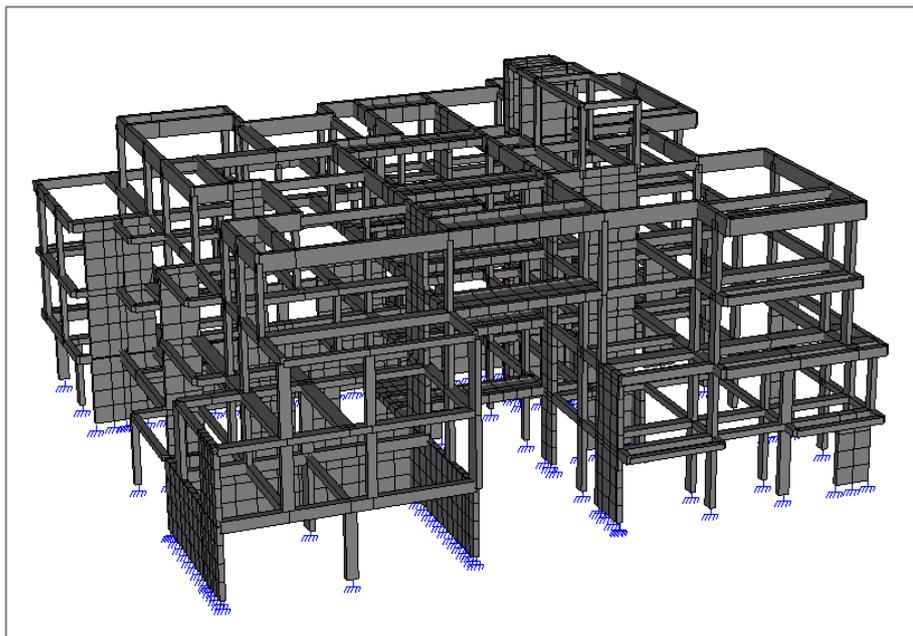
È ormai consuetudine per lo strutturista il ricorso agli spettri di risposta per valutare la risposta sismica di strutture di uso civile: tale approccio risulta infatti particolarmente efficiente perché, riferendosi ai valori massimi di (pseudo)accelerazione cui possono essere soggetti oscillatori semplici in funzione del loro periodo di oscillazione, evita di studiare l'intera storia delle accelerazioni trasmesse a terra dal sisma. L'utilizzo degli spettri di risposta richiede dunque la preventiva "decomposizione modale" della struttura, ovvero la trasformazione del sistema originario nella somma "pesata" delle sue forme modali, ognuna dotata di un unico grado di libertà, ottenute attraverso la soluzione di un problema agli autovalori.

Il **metodo dei vettori di carico di Ritz** si occupa dell'estrazione dei modi propri strutturali (in termini di forme modali e relative frequenze vibrazionali) passando attraverso la trasformazione del sistema discreto originario, ottenuto mediante approccio FEM e quindi generalmente sparso e di grande dimensione, in uno denso e di dimensione molto più ridotta, definito in funzione degli effetti generati dai carichi applicati sulla struttura stessa ed impiegando una opportuna procedura di ortogonalizzazione, quest'ultima volta a definire una base ortonormale del sottospazio nel quale si ambienta il problema ridotto.

Fisicamente, tale trasformazione permette di sintetizzare la distribuzione spaziale della risposta dinamica della struttura in gradi di libertà correlati ai carichi applicati e, poiché il numero di incognite del problema non sarà più pari al numero di gradi di libertà attivi del sistema originario, ma alla dimensione del sottospazio ovvero al numero di *vettori della base di Ritz*, gli oneri computazionali saranno molto minori, a tutto vantaggio della velocità di soluzione, che potrà inoltre essere calcolata utilizzando i robusti algoritmi dell'algebra lineare per i sistemi densi.

## Esempio pratico

Presentiamo di seguito un modello strutturale che risulta esemplificativo dei risultati che si possono ottenere con questa metodologia di calcolo alternativa (*metodo dei vettori di carico di Ritz*).



La struttura risulta alquanto articolata ed irregolare, con presenza di numerosi setti, modellati con elementi shell (guscio/piastra) e conta complessivamente 9174 gradi di libertà attivi, che corrisponde alla dimensione del sistema lineare da risolvere.

## Risultati ottenuti con la metodologia di analisi agli autovalori/autovettori "classica"

Trascurando in questa sede la possibile presenza dell'azione sismica in direzione Z, con la metodologia "classica" di analisi, che prevede l'estrapolazione dei modi propri esatti della struttura, risulta necessario computare almeno 180 modi per riuscire ad eccitare una quantità di massa superiore all'85% nelle direzioni orizzontali principali di applicazione dell'azione sismica. In particolare, il 180° modo risulta determinante per riuscire ad ottemperare la richiesta normativa in direzione X, eccitando lui da solo, il 12% della massa totale attivabile nella direzione indicata.

Riportiamo di seguito la valutazione complessiva delle masse eccitate nelle varie direzioni sismiche ottenuta considerando **180 modi propri**; si evidenzia come l'esecuzione dell'analisi modale abbia richiesto complessivamente un tempo di **13.62 s** (di cui **3.24 s** per l'estrazione dei modi propri e la loro scrittura su file).

### PROSPETTO RIASSUNTIVO MODI PRINCIPALI

Periodo principale	T1	Massa	Massa %	Modo	Note
Direzione X	+3.47e-01	+1.42e+03	43	3	--
Direzione Y	+4.68e-01	+1.72e+03	52	2	--
Direzione Z	+3.89e-02	+1.80e+02	5	141	--
Rotazione Z	+5.17e-01	+1.88e+05	41	1	--

### PROSPETTO RIASSUNTIVO MASSE ECCITATE PER QUOTA MAGGIORE DI: 0.00

Analisi	Direz.X	%	Direz.Y	%	Direz.Z	%	Rotaz.Z	%
--	+3.18e+03	97	+3.21e+03	98	+2.46e+03	75	+4.37e+05	96

I tagli sismici orizzontali alla base della struttura sono stati calcolati sommando le reazioni vincolari in direzione X (azione sismica "EX") e Y (azione sismica "EY"). Come illustrato in figura in direzione X il tagliante alla base risulta essere pari a circa **12'518 kN**:

TABELLA INVILUPPI REAZIONI VINCOLARI						
FORZE / MOMENTI ELEMENTO FINITO PLINTO - VINCOLO (EX)						
Gruppo: 1 - Descrizione: Vincoli di incastro alla base						
Nodo	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
1	3,10	18,10	143,00	0,00	1,33	0,44
3	0,45	18,70	31,70	0,00	1,73	0,19
5	0,75	10,10	42,40	0,00	0,98	0,24
9	13,80	0,71	42,10	0,35	10,40	0,14
11	2,28	9,57	46,40	6,71	1,45	0,14
13	0,77	2,61	13,40	1,50	0,82	0,10
....						
3175	180,00	1,60	617,00	0,95	0,00	0,08
3181	20,00	1,64	436,00	0,77	0,00	0,23
3187	175,00	1,11	120,00	0,68	0,00	0,16
	<b>12517,97</b>					

Allo stesso modo si è valutato il tagliante in direzione Y, pari a circa **12'245 kN**:

**FORZE / MOMENTI ELEMENTO FINITO PLINTO - VINCOLO (EY)**

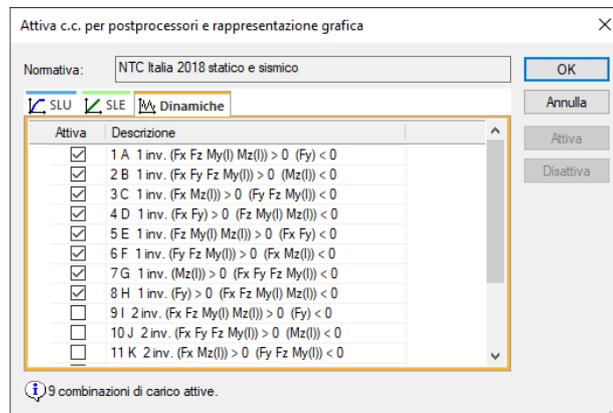
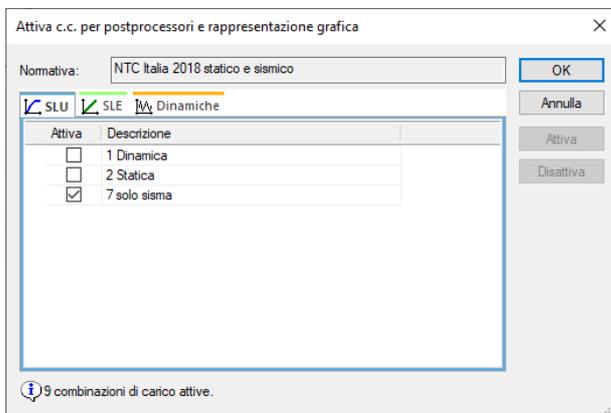
Gruppo: 1 - Descrizione: Vincoli di incastro alla base

Nodo	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
1	5,64	37,10	276,00	0,00	2,47	0,80
3	0,27	165,00	244,00	0,00	1,62	0,25
5	1,42	87,60	363,00	0,00	1,13	0,30
9	7,36	1,81	93,30	0,85	4,23	0,16
11	0,83	21,00	71,20	11,50	0,85	0,16

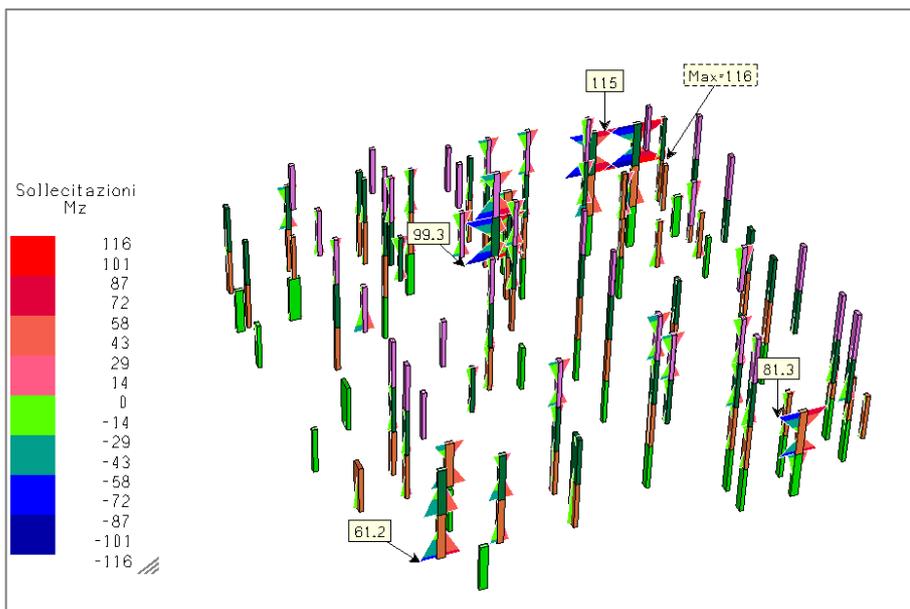
...

3174	23,30	0,42	102,00	2,71	0,00	0,00
3175	18,60	3,53	55,50	2,23	0,00	0,10
3181	32,60	6,03	305,00	1,20	0,00	0,77
3187	17,80	2,47	11,00	1,46	0,00	0,44
		<b>12244,97</b>				

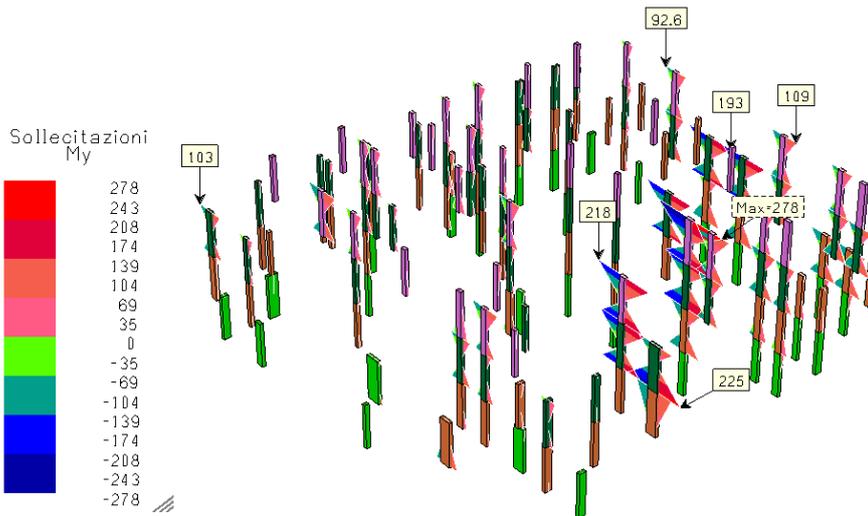
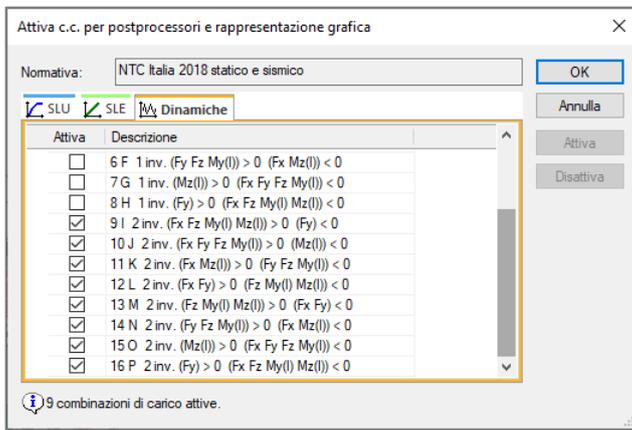
A sostegno del confronto tra i risultati ottenuti applicando le due metodologie di calcolo, riportiamo graficamente i momenti flettenti "Mz" ottenuti applicando la sola azione "EX":



Con la metodologia "standard", negli elementi verticali monodimensionali si ha:



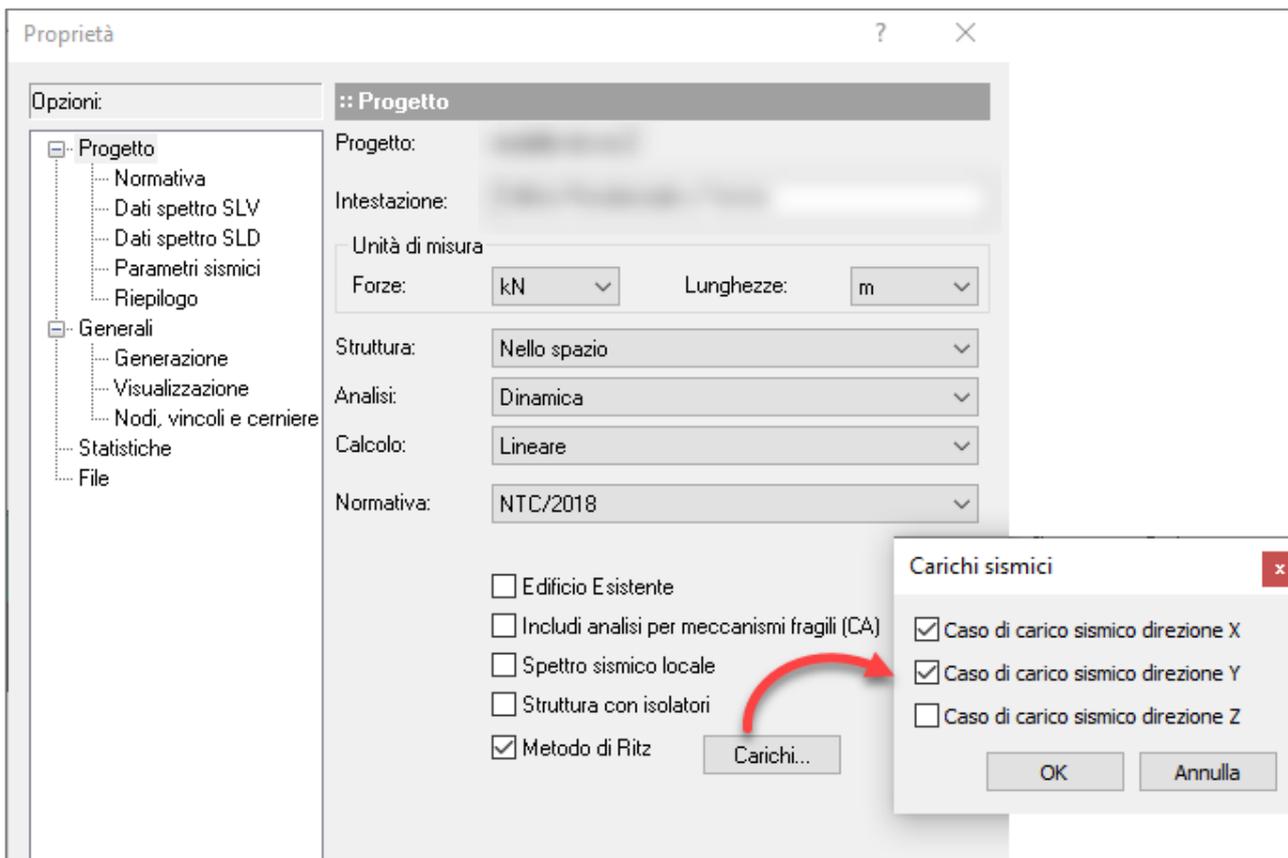
Ed analogamente per i momenti flettenti "My" nel piano ortogonale al primo, nel caso di azione sismica in direzione Y ("EY"):



### Risultati ottenuti con la metodologia di analisi agli autovalori/autovettori con il metodo di Ritz

Passiamo ora a presentare il modello valutato con la metodologia dei *vettori di carico di Ritz*. Come anticipato, tale procedura utilizza gli effetti generati dai carichi applicati sulla struttura, in termini di spostamento, per definire un nuovo set di gradi di libertà: una volta risolto il problema ambientato nel nuovo sistema di riferimento, i risultati vengono riportati a quello originario ottenendo di conseguenza una stima dei modi propri della struttura.

All'interno di MasterSap è possibile applicare carichi proporzionali alle forze di inerzia per azioni sismiche agenti nelle direzioni principali, ossia X, Y e Z, quest'ultima molto utile nel caso in cui si intenda modellare dei ponti, ad esempio. Nel modello oggetto di questo confronto si è pertanto proceduto ad attribuire due dei casi di carico sismici "standard" per MasterSap, ossia quelli corrispondenti ad azioni sismiche applicate nelle direzioni orizzontali principali X e Y:



Con questa metodologia e con i casi di carico riportati con **sole 16 frequenze** il programma riconosce l'attivazione del 96% delle masse in direzione X ed il 98% in direzione Y:

#### PROSPETTO RIASSUNTIVO MODI PRINCIPALI

Periodo principale	T1	Mas sa	Mas sa %	Modo	Note
Direzione X	+3.47e-01	+1.42e+03	43	3	--
Direzione Y	+4.68e-01	+1.72e+03	52	2	--
Direzione Z	+1.92e-01	+1.13e+02	3	6	--
Rotazione Z	+5.17e-01	+1.88e+05	41	1	--

#### PROSPETTO RIASSUNTIVO MASSE ECCITATE PER QUOTA MAGGIORE DI: 0.00

Analisi	Direz.X	%	Direz.Y	%	Direz.Z	%	Rotaz.Z	%
--	+3.16e+03	96	+3.23e+03	98	+3.15e+02	10	+2.87e+05	63

Per ottenere tale risultato, l'esecuzione dell'analisi modale ha richiesto un tempo di **10.0 s** (di cui **0.57 s** per il calcolo dei vettori di Ritz e la loro scrittura su file), con un risparmio complessivo del **23%** rispetto al tempo impiegato dalla procedura standard (ma con un risparmio dell'**85%** con riferimento al tempo per la pura estrazione dei modi propri).

La valutazione del tagliante sismico cui è soggetta complessivamente la struttura, effettuata sulla base della somma delle reazioni vincolari orizzontali, ha prodotto i seguenti risultati:

- la somma delle reazioni vincolari in direzione X è risultata essere pari a 12'836 kN: attraverso una semplice proporzione sulle percentuali di massa attivata in direzione X dai due metodi (97% per il metodo standard, 96% per il metodo di Ritz), si ottiene un tagliante maggiore del 3.6% rispetto a quanto ottenuto applicando la metodologia standard:

### TABELLA INVILUPPI REAZIONI VINCOLARI

#### FORZE / MOMENTI ELEMENTO FINITO PLINTO - VINCOLO (EX)

##### Gruppo: 1 - Descrizione: Vincoli di incastro alla base

Nodo	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
1	3,51	17,90	142,00	0,00	1,53	0,49
3	2,53	20,00	31,10	0,00	2,22	0,19
5	1,32	10,40	42,50	0,00	1,15	0,28
9	14,30	1,67	43,10	0,20	10,50	0,13
11	3,84	9,69	47,40	6,69	1,50	0,13

....

3174	42,00	2,23	352,00	1,04	0,00	0,03
3175	181,00	1,99	617,00	1,05	0,00	0,08
3181	24,00	1,90	437,00	0,86	0,00	0,26
3187	176,00	1,40	120,00	0,73	0,00	0,18
	<b>12836,33</b>					

- allo stesso modo si è valutato il tagliante in direzione Y, che è risultato essere pari a 12'454 kN, maggiore dell'1.7% rispetto a quanto ottenuto applicando il metodo standard:

#### FORZE / MOMENTI ELEMENTO FINITO PLINTO - VINCOLO (EY)

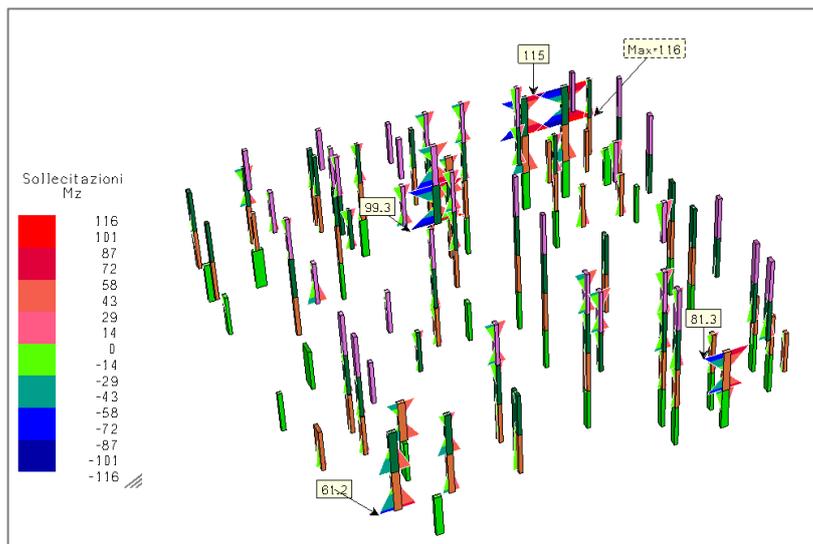
##### Gruppo: 1 - Descrizione: Vincoli di incastro alla base

Nodo	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
1	5,61	37,00	276,00	0,00	2,46	0,79
3	0,58	166,00	243,00	0,00	1,63	0,25
5	1,44	87,60	363,00	0,00	1,13	0,30
9	7,42	3,95	94,40	0,94	4,14	0,16
11	1,06	21,40	71,50	11,60	0,90	0,16

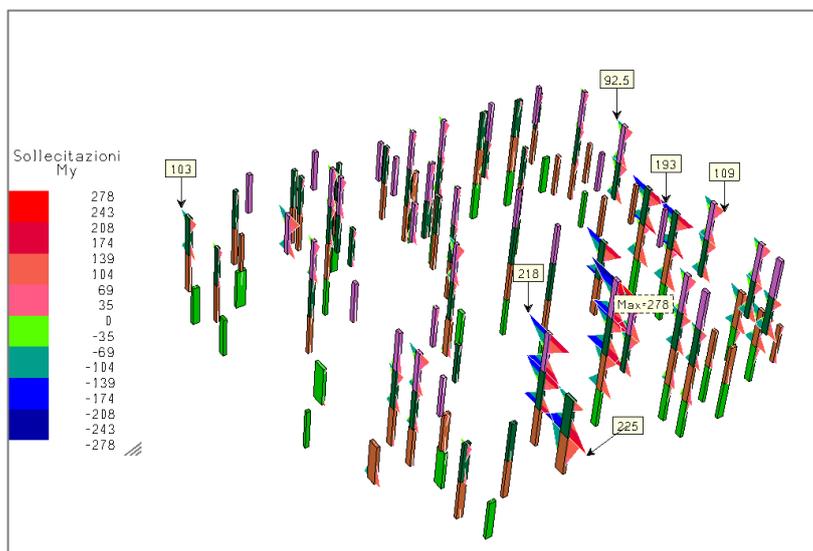
...

3174	30,20	7,49	132,00	3,00	0,00	0,03
3175	18,60	5,43	57,50	3,15	0,00	0,15
3181	32,60	6,80	305,00	1,81	0,00	0,86
3187	17,80	3,87	11,50	2,16	0,00	0,49
		<b>12453,71</b>				

Sempre per confrontare i risultati ottenuti applicando le due metodologie, riportiamo graficamente le sollecitazioni del momento flettente  $M_z$  ottenute dalla sola azione sismica in direzione X mediante metodo di Ritz:



E analogamente per i momenti nell'altro piano di flessione, nel caso di azione sismica in direzione Y:



Da queste immagini si evidenzia come i risultati finali siano assolutamente confrontabili con il metodo tradizionale precedentemente presentato.

I *vettori di Ritz* estratti costituiscono dunque una stima degli autovettori esatti (forme modali) ed i corrispondenti autovalori permettono un'approssimazione delle frequenze modali esatte dall'alto (*Sturm-sequence property*): è perciò opportuno ricordare come, sebbene aumentando la dimensione del sottospazio e quindi il numero di *vettori di Ritz* da estrarre sia possibile in generale migliorare l'approssimazione dei modi propri esatti e dunque ridurre fino ad annullare la differenza tra i risultati ottenuti applicando i 2 metodi, l'efficacia del metodo di Ritz descritto è strettamente legata ad una scelta opportuna dei vettori di carico da applicare, poiché è attraverso questi che viene definita la capacità del sistema ridotto di descrivere la risposta dinamica della struttura reale.

A questo proposito, applicando nuovamente il metodo dei vettori di carico di Ritz alla struttura nell'esempio sopra illustrato, ma richiedendo l'estrazione di **40 modi propri** (invece dei 16 utilizzati in precedenza), è possibile ridurre lo scostamento del taglio alla base calcolato con i 2 metodi dal 3.6% allo **0.9%** in direzione X e annullare del tutto quello in direzione Y.

Si ringrazia per la collaborazione l'ing. Marco Schiavon, autore del modello di calcolo utilizzato per i test e le rappresentazioni grafiche di questo documento.